UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Depto. de Matemáticas Puras y Aplicadas

MA - 2112

Matemáticas V

Ejercicios del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral en varias Variables Reales

Tercera Edición, Noviembre de 1998

Prof. Rafael Jacinto Morales Bueno

Prólogo

Las notas a continuación, no pretenden ser sustituto de los textos recomendados por el Departamento de Matemáticas para el curso de MA-2112; el único fin de las mismas, es el de ayudar al estudiante a entender mejor la materia, tratando de simplificar su enseñanza. El texto se divide en 15 capítulos, en cada uno de ellos se hace un resumen de la teoría correspondiente, lo cual servirá como una guía de repaso a los contenidos teóricos.

Se presentan ejercicios resueltos, algunos son originales, otros se han tomado de guías redactadas por profesores o por preparadores del Dpto. de Matemáticas, también hay ejercicios tomados de exámenes de MA-2112.

He tratado de ser lo más didáctico posible y espero prestar un apoyo a la enseñanza de las Matemáticas Generales. Probablemente se encontraran algunos errores, agradezco las observaciones y sugerencias que puedan hacerme (éstas pueden ser enviadas a mi casillero en el Dpto. de Matemáticas).

Finalmente, deseo agradecer al Prof. Luis Mata, por su entusiasmo y ayuda, al equipo de preparadores que colaboró en la corrección y redacción final de las notas: Aryelly Rodríguez y Yolanda Perdomo y en especial a Mónica Salvioli y Gerardo Martínez, quienes además dedicaron bastante de su tiempo en la elaboración del material impreso, y al Licenciado José Infante y la Bachiller Verónica Mata, quienes se ocuparon de los dibujos.

Rafael Jacinto Morales Bueno.
Sartenejas, 1998

Esta documentación fue realizada en LaTeX.

Nota:

Segunda Edición Corregida y Aumentada (Abril 1997).
Tercera Edición Corregida y Aumentada (Septiembre 1998).

Índice General

Parte I

Cálculo Diferencial

Capítulo 1

Gráficas

Objetivos

Se quiere que el alumno aprenda a interpretar gráficas y conjuntos de nivel para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. (específicamente).

1.1 Conceptos Básicos

(a) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\text{graf} f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = f(\vec{X})$, para por lo menos algún $\vec{X} \in A\}$.

(b) Se define una familia de curvas de nivel como
$Nc(f) = \{\vec{X} \in A / f(\vec{X}) = c = constante\}$
Recordar que graf $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $Nc(f) \subset \mathbb{R}^n$.

1.2 Ejercicios resueltos

Problema 1
Expresar explícitamente $Domf$
(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos(xy)}$
(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\text{sen}(xy)}$
(c) $f(x,y) = \ln(x-y)$
(d) $f(x,y) = \ln(x+y)$
(e) $f(x,y) = \sqrt{y\cos(x)}$
(f) $f(x,y) = \sqrt{y\,\text{sen}(x)}$

Solución
(a) $\cos(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$; (Z = conjunto de los enteros), por lo tanto
$Domf = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/xy = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
(b) $Domf = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)/xy = k\pi, k \in Z\}$
(c) $x - y > 0 \Leftrightarrow x > y \Rightarrow Dom = \{(x,y)/x > y\}$
(d) $Domf = \{(x,y)/x > -y\}$
(e) $y\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \quad \text{y} \quad \cos(x) \geq 0 \quad \text{o} \quad y \leq 0 \quad \text{y} \quad \cos(x) \leq 0$
Por tanto $y \geq 0$ y $x \in ...[-\frac{9\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}] \cup [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}] \cup [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup [3\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]...$

o $y \leq 0$ y $x \in ...[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}] \cup [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]...$
Para ello basta observar el comportamiento de la función dada por $u = \cos(x)$ (ver la figura 1.1)

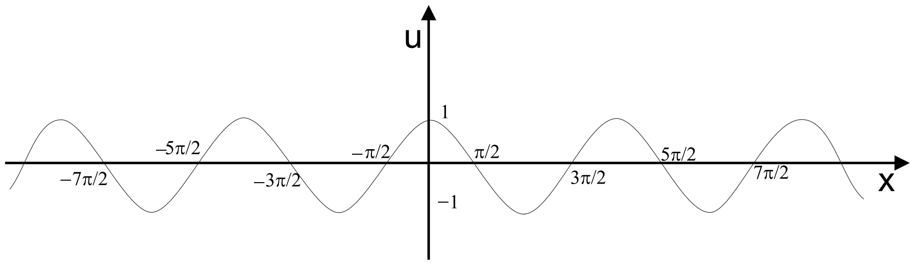

Figura 1.1:

(f) $Dom f = A \cup B$
$A = \{(x, y)/y \geq 0$ y $x \in ...[-4\pi, -3\pi] \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]...\}$
$B = \{(x, y)/y \leq 0$ y $x \in ...[-3\pi, -2\pi] \cup [-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi]...\}$

Problema 2
Identificar geométricamente y dibujar, las curvas de nivel correspondientes a f dada por:
(a) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} \mid y \mid & x < 0 \end{cases}$
(b) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ y $x \neq \pm y$
(c) $f(x, y) = e^{y-x^2}$
(d) $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

Solución
(a) Si $x \geq 0$,

$$\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}} = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(2c)^2} + \frac{y^2}{(3c)^2} = 1$$

y la ultima ecuación representa a una familia de elipses, una elipse por cada valor de c (evidentemente $c \neq 0$).
Si $x < 0$,

$$\frac{1}{2} \mid y \mid= c \Leftrightarrow \mid y \mid= 2c \Leftrightarrow y = \pm 2c$$

que representa a dos familias de semirectas (ver la figura 1.2 en la página 3)
(b) Se procede de la siguiente forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = cx^2 - cy^2 \Leftrightarrow x^2(1 - c) = -y^2(1 + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-y^2}{x^2} = \frac{1 - c}{1 + c} \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{c - 1}{1 + c} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{c - 1}{1 + c}}$$

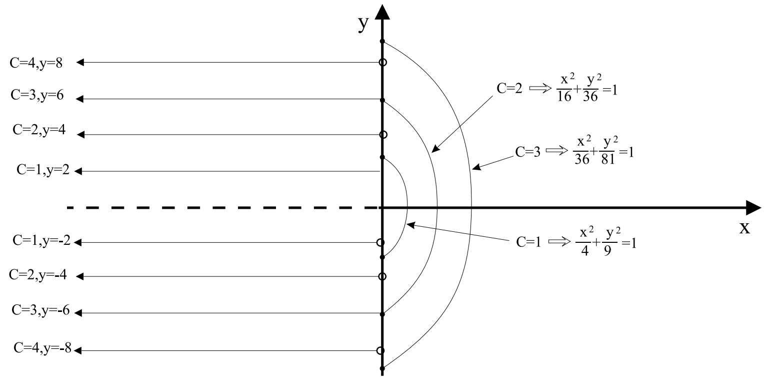

Figura 1.2:

con $c > 1$ y $(x, y) \neq (0, 0)$, $x \neq \pm y$ lo cual representa a una familia de rectas que cruzan por $(0, 0)$ sin contenerlo en su dominio. Los valores de la pendiente de las rectas son menores a 1 estrictamente (ver la figura 1.3)

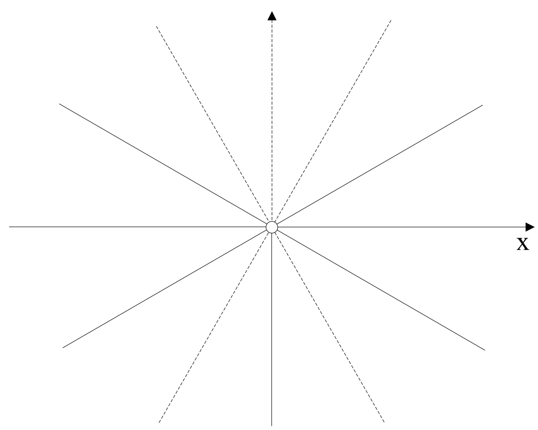

Figura 1.3:

(c) $exp^{y-x^2} = c \Leftrightarrow y - x^2 = \ln c$ con $c > 0$. Por tanto, se tiene una familia de parábolas dadas por $y = x^2 + k$ con $k = \ln c$, $c > 0$. Para algunos valores de c tenemos: (ver la figura 1.4 en la página 4)

$c = 1 \Rightarrow k = \ln 1 = 0$, $y = x^2$
$c = 4 \Rightarrow k = \ln 4 = 1.38$, $y = x^2 + 1.38$
$c = 8 \Rightarrow k = \ln 8 = 2.07$, $y = x^2 + 2.07$
$c = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\ln 2 = -0.69$, $y = x^2 - 0.69$

(d) $2 - x^2 - y^2 = c \Leftrightarrow 2 - c = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{2 - c})^2$. Esto es una familia de circunferencias centradas en el origen y de radios $\sqrt{2 - c}$ con $2 - c \geq 0 \Rightarrow c \leq 2$. Cuando $c = 2$, la ecuación queda $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

Problema 3

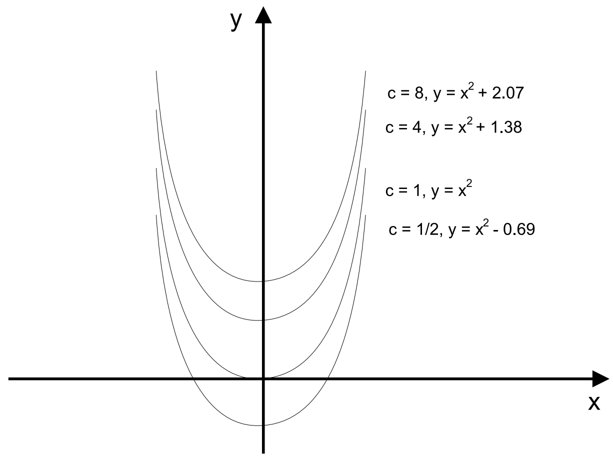

Figura 1.4:

Hallar graf f, y $Nc(f)$ a la siguiente función:
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = 4 - x - 2y$

Solución
La gráfica de f es un plano cuyas intersecciones con los ejes coordenados son los puntos:
$(0, 2, 0); (4, 0, 0); (0, 0, 4)$ (ver la figura 1.5)

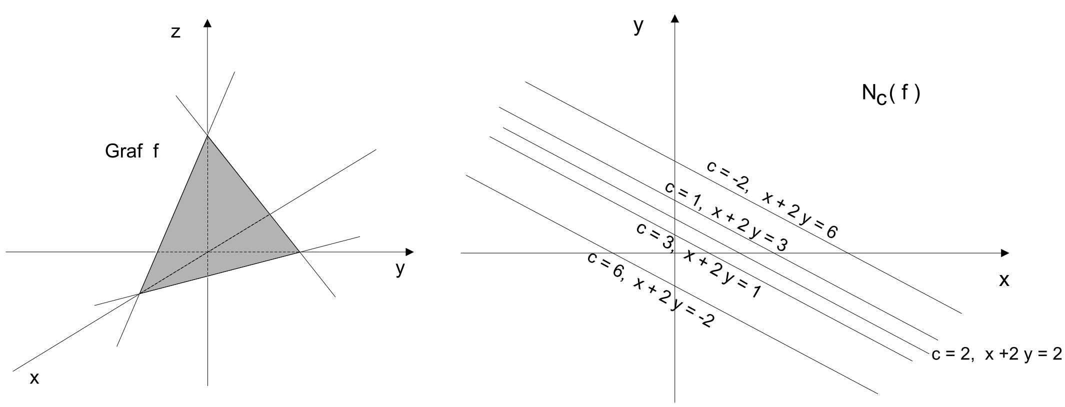

Figura 1.5:

Ahora, para hallar las curvas de nivel, hagamos $4-x-2y = c$, con c constante. Para cada valor de c tenemos la ecuación de una recta en el plano xy, luego las curvas de nivel de f, es decir $Nc(f)$, forman una familia de rectas paralelas.

Problema 4
Hallar graf f para la siguiente función:

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow z = f(x, y) = x^3 - xy^2$
donde $A = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq x\}$.

Solución
Para obtener graf f, vamos a utilizar el "método de secciones", para ello, utilicemos las secciones para x constante:

Si $x = 1 \Rightarrow z = 1 - y^2 \begin{cases} y = 0 \Rightarrow z = 1 \\ z = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$

Si $x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}y^2 \begin{cases} y = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{8} \\ z = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

Observamos que cortando graf f con planos de ecuación $x = c$, se obtienen parábolas con vértices en el segmento que va desde el $(0, 0, 0)$(cuando $x = 0$) al $(1, 0, 1)$(cuando $x = 1$) (ver la figura 1.6)

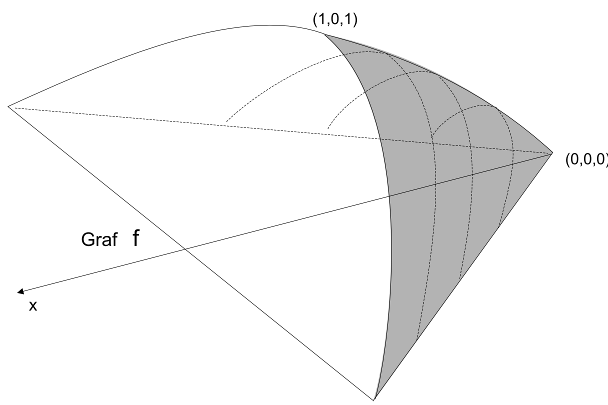

Figura 1.6:

Luego, la gráfica nos queda como en la figura, una especie de "Caverna con Techo Parabólico".

Problema 5
Hallar graf f y graf g para:
$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \text{sen}(\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{4})$

$g : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow g(x, y) = \text{sen}(\frac{\pi(x^2+y^2)}{4})$

Solución
Observemos que U es un disco cerrado, es decir, puntos del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1, unido con la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
Ahora bien, si se hace $x = 0$ en $f(x, y)$, se obtiene la intersección de graf f con el plano yz, asi

$z = \text{sen}(\frac{\pi}{4}y)$ con $0 \leq y \leq 1$, luego al rotar la dicha curva alrededor del eje z, se obtiene finalmente graf f (ver la figura 1.7)

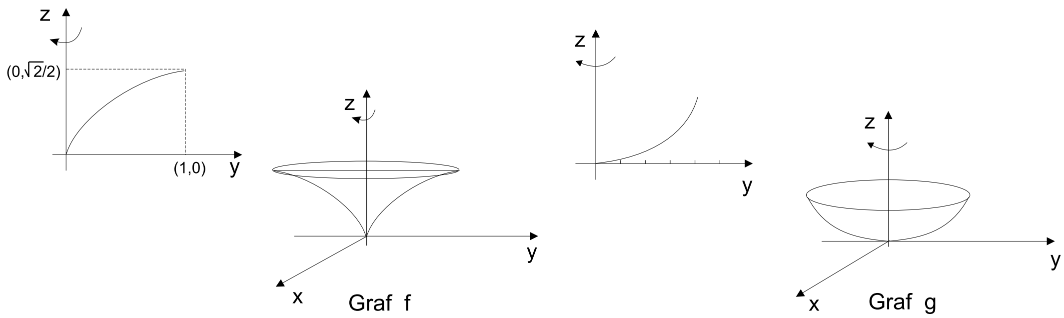

Figura 1.7:

Análogamente, con $x = 0$ en $g(x, y)$, $z = \text{sen}(\frac{\pi}{4}y^2)$ con $0 \leq y \leq 1$; y al rotar alrededor del eje z, se obtiene graf g.

Nota: $z = \text{sen}\left(\dfrac{\pi\, y^2}{4}\right) \begin{cases} y = 1, & \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7071 \\ y = \frac{1}{2}, & \text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) \approx 0.195 \\ y = \frac{1}{3}, & \text{sen}\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx 0.0871 \end{cases}$

Problema 6

(a) Sea $f(x, y) = 1 - y^2$. Dibujar graf f e identificar $Nc(f)$.
(b) Hallar $Nc(f)$ para $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$
(c) Dibujar la gráfica de la superficie cuya ecuación es $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$.

Solución

(a) $z = 1-y^2$ y la x es cualquiera, es decir, las ecuaciones correctas para f debieran ser $\begin{cases} z = 1 - y^2 \\ x = x \end{cases}$

Si $x = 0 \Rightarrow z = 1 - y^2$ representa una parábola en el plano zy.
Si $x = -2 \Rightarrow z = 1 - y^2$ representa una parábola en el plano $x = -2$ que es un plano paralelo al yz.
Si $x = 2 \Rightarrow z = 1 - y^2$ representa una parábola en el plano $x = 2$, etc.
Ahora, $Nc(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1-y^2 = c\}$. Por tanto, $y = \pm\sqrt{1 - c}$, $c \leq 1$. Esta expresión representa a una familia de rectas en $\mathbb{R}^2$, paralelas al eje x. Por ejemplo:
Con $c = 0$, $y = \pm 1$. Dos rectas.
Con $c = 1$, $y = 0$. Eje x.
Con $c = -1$, $y = \pm\sqrt{2}$. Dos rectas. Así para el resto (ver la figura 1.8 en la página 7)
(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 = c \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{1/3} + \frac{z^2}{1/4} = c \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{2})^2} = c$ y para obtener la ecuación de un elipsoide, solo basta tener 1 en el segundo miembro, dividiendo por $c \neq 0$ tendremos:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{c}{3}})^2} + \frac{z^2}{(\frac{\sqrt{c}}{2})^2} = 1$$

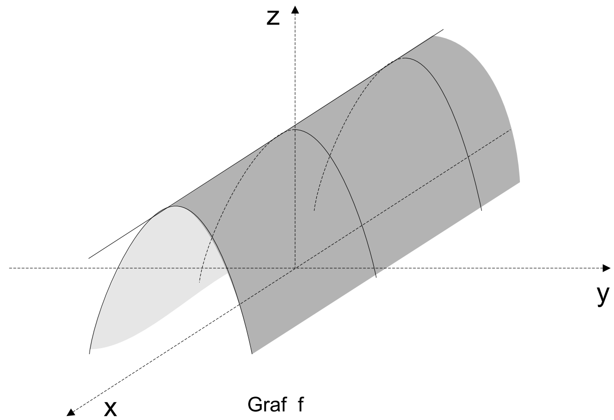

Figura 1.8:

lo cual representa a una familia de elipsoides de semiejes $\sqrt{c}$, $\sqrt{\frac{c}{3}}$ y $\frac{\sqrt{c}}{2}$ $(c > 0)$ respectivamente.

(c) $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$ representa a una superficie en $\mathbb{R}^3$ pero ninguna de las variables es "función" de las otras (En el sentido de la definición de función que conocemos, ya que al despejar por ejemplo $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3y^2 - 4x^2)}$, y el $\pm$ contradice la definición de función).
Sin embargo, manipulando $4x^2 + 2z^2 = 3y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{3(\frac{1}{2})^2} + \frac{z^2}{3(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{z^2}{3(\sqrt{\frac{3}{2}})^2}$ y utilizando el método de "secciones" obtenemos lo siguiente:
Si $y = 0$ (corte con el plano xz) $\Rightarrow$ $(0, 0, 0)$ que es el origen.
Si $y \neq 0$, como $\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, para cada $y = k \neq 0$, tendremos elipses en los planos $y = k$ con eje mayor paralelo al eje z y el menor paralelo al eje x (Para llegar a esta conclusión, el alumno debe repasar la discusión de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$ o $a < b$).
La expresión queda

$$\frac{x^2}{(\frac{k\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{z^2}{(k\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = 1$$

A medida que $|k|$ aumenta, las elipses son mas grandes. Para $x = 0$ se obtienen las líneas rectas $z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}k = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}y$ (ver la figura 1.9 en la página 8)
Luego la gráfica es una cónica.

Problema 7
Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 6 - x^2 - 3y$. Hallar graf f y $Nc(f)$, con $c = 2,\ 0,\ -4$.

Solución
$z = 6 - x^2 - 3y$, su intersección con el plano xy la obtenemos con $z = 0 \Rightarrow x^2 = 6 - 3y$, ecuación que representa a una parábola simétrica con el eje y y que corta al eje x en los puntos $x = \pm\sqrt{6}$, $y = 0$ o sea en $(\sqrt{6}, 0)$ y $(-\sqrt{6}, 0)$. Las intersecciones con los planos zx y zy se obtienen haciendo

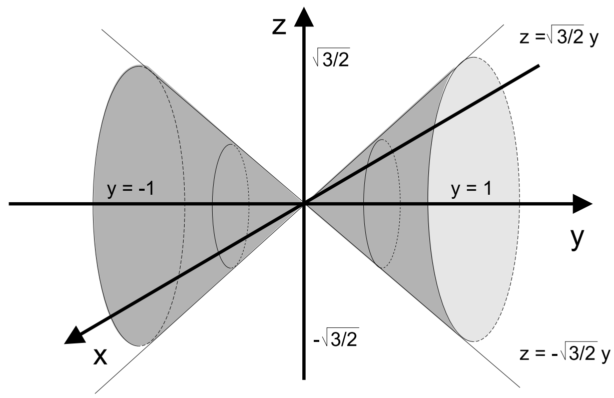

Figura 1.9:

en $z = 6 - x^2 - 3y$, $y = 0$ y $x = 0$ obteniendo asi: $z = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 - z$ (Parábola en plano zx, con eje z) y $z = 6 - 3y$. Una recta en plano zy (ver la figura 1.10)

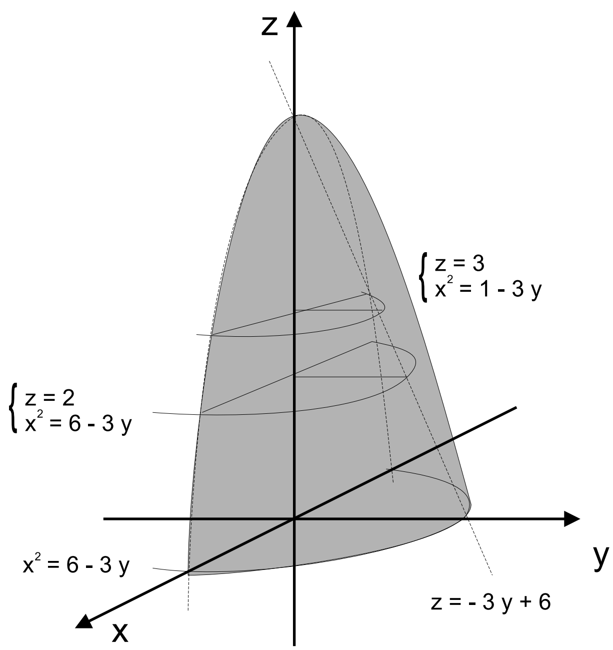

Figura 1.10:

Ahora bien, utilizando secciones de la superficie dada, con los planos $z = k$, constante, obtenemos parábolas con vértices en la recta $z = 6 - 3y$. En la figura que se presenta a continuación se muestran las parábolas:

Para $z = 0$, $x^2 = 6 - 3y$; para $z = 2$, $x^2 = 4 - 3y$; y para $z = 3$, $x^2 = 1 - 3y$.

Las curvas $Nc(f)$ son las parábolas de ecuaciones:

$6 - x^2 - 3y = c \Rightarrow x^2 = 6 - 3y - c$ (ver la figura 1.11 en la página 9)

Para $c = 4$, $x^2 = 10 - 3y \begin{cases} x = 0, y = 10/3 \\ y = 0, x = \pm\sqrt{10} \end{cases}$

Para $c = 2$, $x^2 = 4 - 3y \begin{cases} x = 0, y = 4/3 \\ y = 0, x \pm 2 \end{cases}$

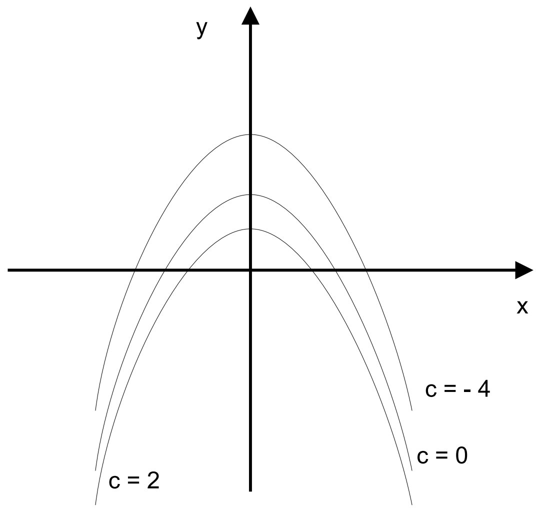

Figura 1.11:

Para $c = 0$, $x^2 = 6 - 3y \begin{cases} x = 0, y = 2 \\ y = 0, x \pm \sqrt{6} \end{cases}$

Problema 8
La temperatura en un punto (x, y) de una lámina plana de metal es de T grados centígrados, con $T = 3y - x^2$. Dibuje las isotermas para $T = 0$ y $T = -2$.

Solución
Este ejercicio queda como práctica para el estudiante.

Problema 9
Describa con detalles, el dominio de f:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x,y,z) & = \frac{x}{|z|-|y|} \\ (b) & f(x,y,z) & = \frac{x}{\sqrt{81-y^2-9x^2}} \end{array}$$

Solución
Este ejercicio queda como práctica para el estudiante.

Problema 10
Describir $Nc(f)$ para $f(x,y,z) = \cos(x^2+y^2+z^2)$ y en particular para $c=0$ y $c=1$.

Solución
$\cos(x^2+y^2+z^2) = c \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \cos^{-1} c$, lo cual en general, representa a una familia de esferas concéntricas en el origen con radios $r = \sqrt{\cos^{-1} c}$.
En particular, para $c=0$, $\cos^{-1} 0 = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0,1,2,...$
Para $c=-1$, $\cos^{-1}(-1) = (2n+1)\pi,\ n = 0,1,2,...$
Por tanto, se tienen esferas de centro $(0,0,0)$ y radios $r = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}},\ n = 0,1,2...$ para $c=0$ y esferas de centro $(0,0,0)$ y radios $r = \sqrt{(2n+1)\pi},\ n = 0,1,2...$ en el caso $c=-1$.

Problema 11
Consideremos f, una "función de producción" definida por $f(x,y) = 3\sqrt{xy}$. Trazar un "mapa de relieve" de f, el cual muestre las curvas de producción constante c, con $c = 7,\ 5,\ 3$.

Solución
El mapa de relieve es el conjunto de las curvas formadas al intersectar la superficie de ecuación $z = 3x^{1/2}y^{1/2}$, con los planos de ecuaciones $z=c=7,\ z=c=5,\ z=c=3$, respectivamente (ver la figura 1.12)

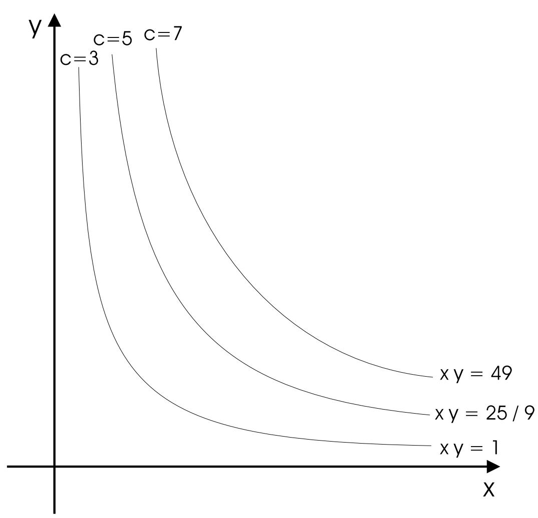

Figura 1.12:

Si se sustituye z por $c = 3,\ 5,\ 7$, respectivamente, se obtienen las ecuaciones

$$3x^{1/2}y^{1/2} = 3,\ 3x^{1/2}y^{1/2} = 5,\ 3x^{1/2}y^{1/2} = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = 1,\ xy = \frac{25}{9},\ xy = \frac{49}{9}$$

con $x > 0,\ y > 0$, representando respectivamente, las ramas de las hipérbolas correspondientes, en el primer cuadrante. Tales curvas son las "curvas de producción" constante, con $c = 3,\ 5,\ 7$ respectivamente.

Problema 12
Identificar y dibujar $Nc(f)$ para $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)^{-1/2}$ y $c = 1, \sqrt{13}$.

Solución
Obsérvese que $f : \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z)/x \neq 0 \quad y \quad y \neq 0\} \to \mathbb{R}$
Por tanto $Nc(f) \subset \mathbb{R}^3$ asi $Nc(f)$ es una "familia de superficies" de nivel. Con

$$z(x^2+y^2)^{-1/2} = c \Rightarrow z = c\sqrt{x^2+y^2}$$

lo cual representa a una familia de superficies cónicas circulares con $z \geq 0$, si $c = 1, \sqrt{3}$. En efecto:
$c = 1 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$
$c = \sqrt{3} \Rightarrow z^2 = 3(x^2+y^2)$
Por tanto

$$z^2 = x^2 + y^2$$

y

$$(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 z^2 = x^2 + y^2$$

cuyas representaciones respectivas en $\mathbb{R}^3$ son (ver la figura 1.13)

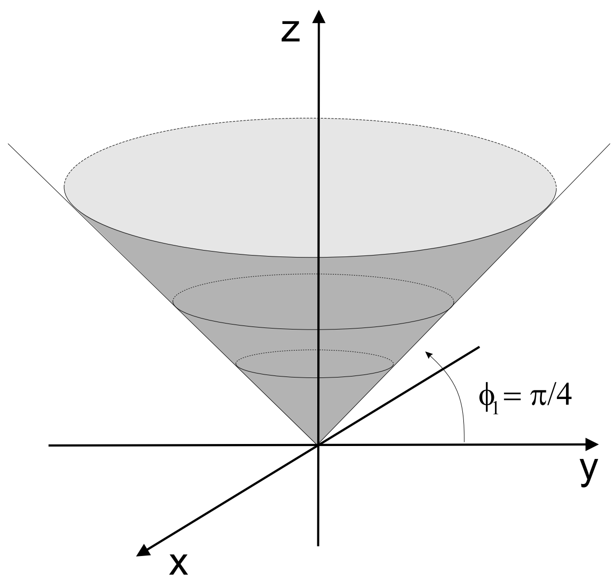

Figura 1.13:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (\tan\varphi_1)^2 z^2 = x^2 + y^2$$

con $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (\tan\varphi_2)^2 z^2 = x^2 + y^2$$

con $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ (ver la figura 1.14 en la página 12)

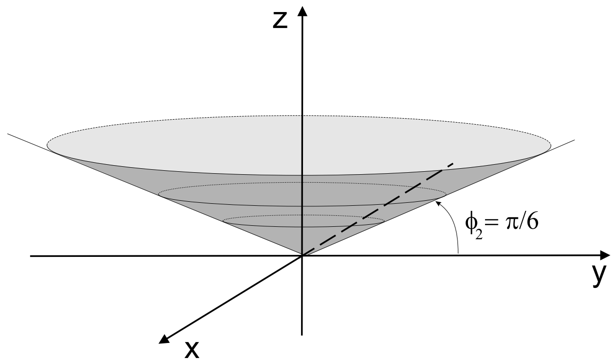

Figura 1.14:

En general, una superficie cónica de eje z, vértice en el origen y semiángulo cónico φ tiene ecuación

$$(\tan\varphi)^2 z^2 = x^2 + y^2$$

De eje x, vértice en el origen y semiángulo cónico φ:

$$(\tan\varphi)^2 x^2 = y^2 + z^2$$

De eje y, vértice en el origen y semiángulo cónico φ:

$$(\tan\varphi)^2 y^2 = x^2 + z^2$$

Capítulo 2

Abiertos, cerrados, frontera. Límites y continuidad

Objetivos

Que el alumno relacione las definiciones conocidas en cursos anteriores para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las dadas ahora para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, en relación a conjuntos abiertos, cerrados, frontera de un conjunto, límites y continuidad.

2.1 Definiciones y Conceptos Básicos

(a) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, es abierto si para todo $\vec{X_0} \in A \, \exists \, r_{real} > 0$, tal que el disco abierto de centro $\vec{X_0}$ y radio r, esté contenido en A. O sea: $D_r(\vec{X_0}) \subset A$.

(b) Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, si $\vec{X}$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ tal que se puede hallar $r_{real} > 0$ con $D_r(\vec{X})$ conteniendo al menos un punto de B y al menos un punto que no esté en B, $\vec{X}$ es un punto frontera de B.
El conjunto de todos los puntos frontera de B de denota ∂B. Es obvio que si A fuese abierto, entonces los puntos fronteras de A no podrían pertenecer a A.

(c) Podemos definir conjunto cerrado C, $C \subset \mathbb{R}^n$, si y sólo si $\partial C \subset C$.

(d) Sea $f : A_{abierto} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\vec{X} \longrightarrow f(\vec{X})$, sea $\vec{X_0} \in A$ o $\vec{X_0} \in \partial A$. Se dice que el "límite de f" en $\vec{X}$ es $l \in \mathbb{R}$, cuando $\vec{X}$ tiende a $\vec{X_0}$ y se denota

$$\lim_{\vec{X} \to \vec{X_0}} f(\vec{X}) = l$$

si dado un ϵ real y positivo tan pequeño como deseemos, se puede hallar un δ real, función de ϵ y positivo tal que:

$$Si \, \|\vec{X} - \vec{X_0}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{X}) - l\| < \epsilon$$

(e) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es "contínua" en un $\vec{X_0} \in \mathbb{R}^n$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$\begin{cases} (i)\ \vec{X}_0 \in A \\ (ii)\ \exists \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) = f(\vec{X}_0) \end{cases}$$

(f) Límite a lo largo de una curva:
Sea $f : A_{abierto} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$
Sea $(x_0,y_0) = \vec{X}_0 \in A$ o $\vec{X}_0 \in \partial A$.
Si $\exists \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(x,y) = l$, l es único para todas las curvas que pasen por $\vec{X}_0$.
Por lo tanto, si el

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(x,y) = l_1$$

para $\mathcal{C}_1$ curva por $\vec{X}_0$. Y si el

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(x,y) = l_2$$

para $\mathcal{C}_2$ curva por $\vec{X}_0$. Entonces

$$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \nexists \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X})$$

.
Ahora bien, si $\exists$

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) = l$$

a lo largo de alguna curva que pase por $\vec{X}_0$*, no podemos afirmar que exista* $\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X})$ *puesto que podría haber aguna curva por* $\vec{X}_0$ *tal que*

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) = h$$

con $l \neq h$*.*

2.2 Ejercicios resueltos

Problema 1
Demostrar analíticamente que los conjuntos A dados a continuación son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$:
(a) $A = \{(x,y)/y > 0\}$
(b) $A = \{(x,y)/x \in (0,1)$ y $y \in (0,1)\}$
(c) $A = \{(x,y)/x \in (-1,1)$ y $y \in (-1,1)\}$
(d) $A = \{(x,y)/3 < x^2 + y^2 < 9\}$

Solución
(a)Sea (x_0,y_0) cualquiera $\in A$, para probar que A es abierto, necesitamos demostrar que existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que un disco abierto de radio r y centro (x_0,y_0), esta contenido en A, en simbolos: $\exists\, r \in \mathbb{R} :\ D_r(x_0,y_0) \subset A$. (ver la figura 2.1 en la página 15)
Ahora bien, sea (x,y) cualquiera $\in D_r(x_0,y_0)$, bastará que probemos que $(x,y) \in A$ para que quede demostrado que $D_r(x_0,y_0) \subset A$. Esto se consigue eligiendo $r = y_0 > 0$, puesto que $(x_0,y_0) \in A$. Observemos que

$$|y - y_0| = \sqrt{(y-y_0)^2} < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r = y_0$$

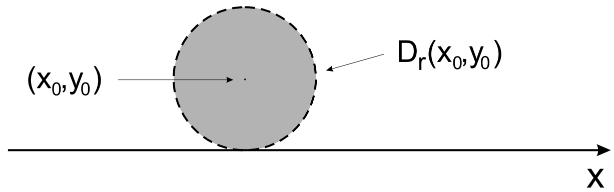

Figura 2.1:

La primera desigualdad proviene de la definición de valor absoluto, y la última desigualdad de la definición de disco abierto.
Por tanto,

$$|y - y_0| < y_0 \Rightarrow -y_0 < y - y_0 < y_0$$

De aqui salen dos desigualdades las cuales se cumplen simultáneamente si y sólo si $y > 0$. (Analícelo!)
Por tanto, $(x, y) \in A \;\Rightarrow\; D_r(x_0, y_0) \subset A$ y **A es abierto.**

(b)Sea $(x_0, y_0) \in A$, debemos hallar un $r > 0$ tal que $D_r(x_0, y_0) \subset A$. (ver la figura 2.2)

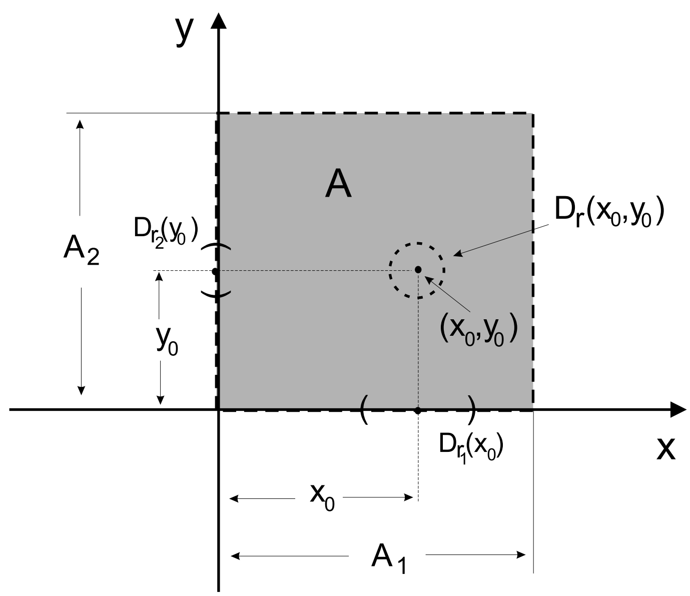

Figura 2.2:

Sean $A_1 = (0, 1)$ en el eje x y $A_2 = (0, 1)$ en el eje y, sabemos que ambos conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}$. (Admitimos que un Disco Abierto en $\mathbb{R}^n$ es un Conjunto Abierto en $\mathbb{R}^n$, aqui, A_1 y A_2, intervalos abiertos son discos abiertos en $\mathbb{R}$).
Escojamos $r = min(r_1, r_2)$; si demostramos que cualquier (x, y) en $D_r(x_0, y_0)$ está tambien en A, quedará demostrado que $D_r(x_0, y_0) \subset A$ y por tanto A es abierto en $\mathbb{R}^2$. Planteamos lo siguiente, sea

$$(x, y) \in D_r(x_0, y_0) \Rightarrow \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Ahora,

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

$$|y - y_0| = \sqrt{(y-y_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$$

Pero al ser $r = min(r_1, r_2)$ resulta $|x - x_0| < r_1$ y $|y - y_0| < r_2$.
Por tanto, $x \in A_1$ y $y \in A_2 \Rightarrow (x, y) \in A_1 x A_2$ (Producto Cartesiano de A_1 y A_2). Pero es obvio que A_1x$A_2 = A$, entonces finalmente:
$(x, y) \in A \;\Rightarrow\; D_r(x_0, y_0) \subset A \;\Rightarrow A$ **es abierto en** $\mathbb{R}^2$.

(c)Utilice un procedimiento similar al empleado en (b) para resolver este problema.

(d)$A = \{(x, y) \,|\, 3 < x^2 + y^2 < 9\}$
Sea $\vec{X_0} = (x_0, y_0) \in A$. Por tanto $3 < x_0^2 + y_0^2 < 9$. Sea $D_r(\vec{X_0})$; la escogencia de r es:
$r = min\{3 - \|\vec{X_0}\|, \|X_0\| - \sqrt{3}\}$. En cuyo caso, si $\vec{Y} \in D_r(\vec{X_0})$, con $\vec{Y} = (y_1, y_2)$, restaría probar que $\vec{Y} \in A$, o sea que

$$3 < y_1^2 + y_2^2 < 9$$

(ver la figura 2.3)

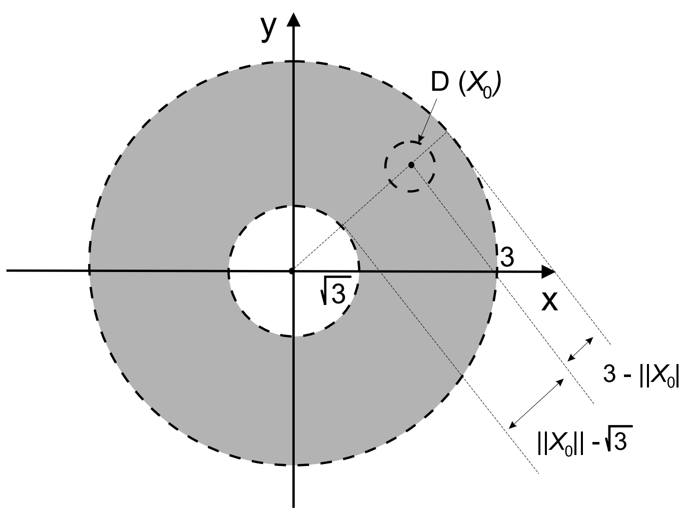

Figura 2.3:

Ahora bien $\vec{Y} \in D_r(\vec{X_0}) \Rightarrow \|\vec{Y} - \vec{X_0}\| < r$ y si r fuese $3 - \|\vec{X_0}\|$ entonces seria

$$\|\vec{Y}\| - \|\vec{X_0}\| \leq \|\vec{Y} - \vec{X_0}\| < 3 - \|\vec{X_0}\| \Rightarrow \|\vec{Y}\| - \|\vec{X_0}\| < 3 - \|\vec{X_0}\| \Rightarrow \|\vec{Y}\| < 3 ...(I)$$

También tenemos $\|\vec{X_0} - \vec{Y}\| = \|\vec{Y} - \vec{X_0}\| < r$ y si $r = min\{3 - \|\vec{X_0}\|, \|\vec{X_0}\| - \sqrt{3}\}$ será

$$3 - \|\vec{X_0}\| < \|\vec{X_0}\| - \sqrt{3}$$

por tanto

$$\|\vec{X_0} - \vec{Y}\| < \|\vec{X_0}\| - \sqrt{3}$$

y

$$\|\vec{X_0}\| - \|\vec{Y}\| \leq \|\vec{X_0} - \vec{Y}\|$$

por tanto

$$\|\vec{X_0}\| - \|\vec{Y}\| \leq \|\vec{X_0} - \vec{Y}\| < \|\vec{X_0}\| - \sqrt{3} \Rightarrow -\|\vec{Y}\| < -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} < \|\vec{Y}\| ...(II)$$

(I) y $(II) \Rightarrow \sqrt{3} < \|\vec{Y}\| < 3 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 3$ lo cual es

$$3 < y_1^2 + y_2^2 < 9$$

como deseábamos demostrar.

Problema 2
Analizar intuitivamente, los conjuntos a continuación, indicando cuáles son abiertos, cuáles cerrados y cuáles no son ni abiertos ni cerrados o abiertos y cerrados:
(a) $\{(x, y)/2x^2 + 5y^2 < 3\}$
(b) $\{(x, y)/x > 0, y \geq 0\}$
(c) $\{(x, y)/x > 1, y > -1\}$
(d) $\{(x, y)/x \leq y\}$
(e) $\{(x, y)/x = 1 - y^2\}$
(f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 < 0\}$
(g) $\{(x, y)/ - x^2 - y^2 \leq 0\}$
(h) $\{(x, y)/ \mid x \mid\leq 1, \mid y \mid\leq 1\}$

Solución
(a) $\{(x, y)/2x^2 + 5y^2 < 3\}$ es igual a

$$\{(x, y)/\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{3}{5}})^2} < 1\}$$

Se trata de todos los puntos del interior de una Elipse, el conjunto es abierto.

(b) $\{(x, y)/x > 0, y \geq 0\} \;\Rightarrow\;$ (ver la figura 2.4)

Figura 2.4:

El conjunto dado no contiene a toda su frontera.
Por tanto, no es abierto ni cerrado. (c) $\{(x, y)/x > 1, y > -1\}$
El conjunto es abierto. (ver la figura 2.5 en la página 18)
(d) $\{(x, y)/x \leq y\}$
El conjunto es cerrado. (ver la figura 2.6 en la página 18)

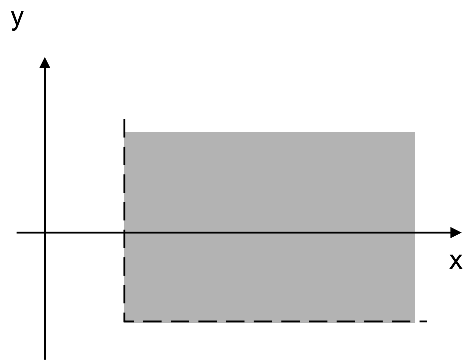

Figura 2.5:

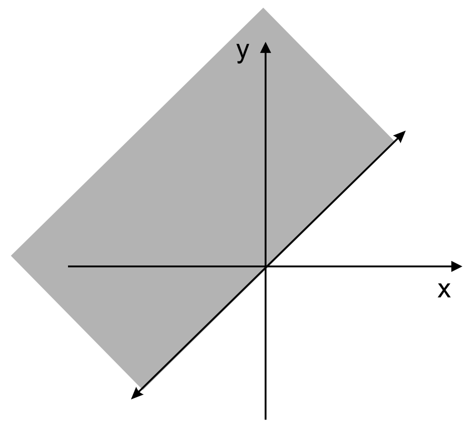

Figura 2.6:

(e) $\{(x,y)/x = 1 - y^2\}$
El conjunto es cerrado. (ver la figura 2.7 en la página 19)
(f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 < 0\}$
Este conjunto es el conjunto vacío (Φ). Por tanto, es abierto y también es cerrado.

(g) $\{(x,y)/ - x^2 - y^2 \leq 0\} = \{(x,y)/ - (x^2 + y^2) \leq 0\}$
Este conjunto es todo $\mathbb{R}^2$, el cual es abierto y cerrado.

(h) A es cerrado ya que contiene a su frontera (ver la figura 2.8 en la página 19)
$\partial A =$
$= \{(1,y)/-1 \leq y \leq 1\} \cup \{(-1,y)/-1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1)/-1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,-1)/-1 \leq x \leq 1\} =$
$= \{-1,1\} \times [-1,1] \ \cup [-1,1] \times \{-1,1\}$

Problema 3

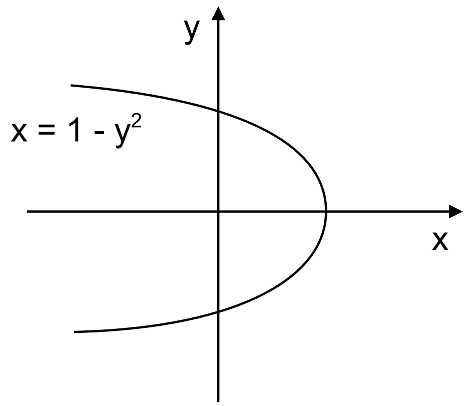

Figura 2.7:

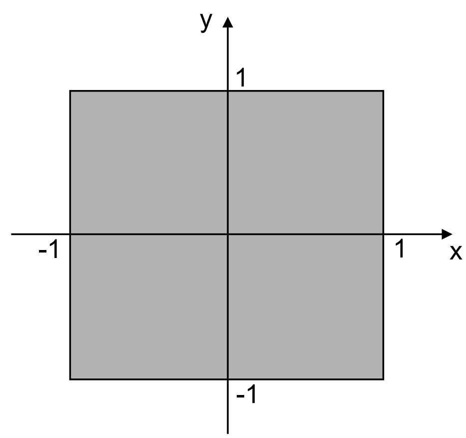

Figura 2.8:

(a)Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

con

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{sen}(\frac{y}{x}) \quad \text{y} \quad x \neq 0.$$

(b)Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0$$

con $\epsilon = 10^{-10}$.

(c)Demuestre que para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(\vec{X}) = c$, con $c = constante$, entonces $\exists$

$$\lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} f(\vec{X}) = c$$

es decir, el límite de una constante es ella misma.

(d)Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

(e)Averiguar si existe o no

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

con

$$f(x,y)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2-y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$$

(f)Sea $f:A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y)=\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

¿Se puede definir f para que sea contínua en (0,0)?

(g)¿Se puede definir f de la pregunta 2.-(e) para que sea contínua en (0,0)?

(h)Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Demuestre que f es contínua en $(0,0)$.

Solución

(a)Obsérvese que $(0,0)\nexists Dom(f)$ y sin embargo vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. (En la definición de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, el punto (x_0,y_0) puede pertenecer a $Dom(f)$ o ser un punto frontera de $Dom(f)$).

Sea ϵ un real positivo suficientemente pequeño. Queremos hallar δ real positivo y función de ϵ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ entonces demostraremos que $\|f(x,y)-0\|<\epsilon$. En efecto: $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ será nuestra hipótesis (aun cuando todavía no conocemos el δ, el cual fijaremos mas adelante).

Ahora,

$$\|xy\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}-0\|=|xy\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}|\leq|x||y||\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}|\underbrace{<\quad |x|\,|y|}_{|\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}|<1(\text{puesto que } x\neq 0)}$$

Pero,

$$|x||y|=\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\leq\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}=(\sqrt{x^2+y^2})^2$$

y como nuestra hipótesis es que $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ basta escoger $\delta\leq\sqrt{\epsilon}$, ya que asi

$$\|xy\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x}-0\|<(\sqrt{(x^2+y^2)})^2<\delta^2\leq\epsilon$$

(b)Aquí $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x+y$. Sea $\epsilon = 10^{-10}$ dado, suponer $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. ($\delta$ que trataremos de hallar como función de ϵ para que $\|x+y-0\| < \epsilon$).
Ahora,

$$\|f(x,y)-0\| = \|x+y-0\| = |x+y| \leq |x|+|y| = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

luego basta escoger $\delta < \frac{\epsilon}{2} = \frac{10^{-10}}{2}$ para que

$$\|f(x,y)-0\| \leq 2\delta < 2\frac{10^{-10}}{2} = 10^{-10} = \epsilon$$

Asi

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \|x+y-0\| < \epsilon$$

(c)Vamos a probar que

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1,\ldots,x_n) = c$$

con $\vec{X} = (x_1,\ldots,x_n)$ y $\vec{X}_0 = (a_1,\ldots,a_n)$. Fijar $\epsilon_{real} > 0$, tratar de hallar $\delta(\epsilon)_{real} > 0$ tal que si $\|\vec{X}-\vec{X}_0\| < \delta$ se pruebe que $\|f(\vec{X})-c\| < \epsilon$. Pero $\|\vec{X}-\vec{X}_0\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}$ y $\|f(\vec{X})-c\| = |c-c| = 0$ pero $0 < \epsilon$ por hipótesis, entonces

$$\|\vec{X}-\vec{X}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2} < \delta \Rightarrow \|f(\vec{X})-c\| < \epsilon$$

(d)Si $y=0$, por definición $f(x,y)=0$ y por el ejercicio (c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

Si $y \neq 0$, por definicion $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{y})$, fijar ϵ_{real}, vamos a hallar $\delta(\epsilon)_{real} > 0$ tal que, si

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

se demuestre que

$$\|f(x,y)-0\| = |x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| < \epsilon$$

En efecto, $|x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| \leq |x||\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| < |x|$ puesto que $|\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| < 1$ para $y \neq 0$ (y $y \neq 1$, ya que con $y=1$ $\mathrm{sen}\,\frac{1}{1} = 0$ y $x\,\mathrm{sen}\,1 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$. Trivial).
Por tanto, $|x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| < |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, luego basta escoger $\delta < \epsilon$ y queda

$$|x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \epsilon$$

(e)Estudiemos el $\lim f(x,y)$ a lo largo de un haz de rectas que pasen por $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2}-1}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0;y=mx} \frac{e^{x^2}-1}{x^2-y^2} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2(1-m^2)}}_{es\, de\, la\, forma\, \frac{0}{0}} \overbrace{=}^{Regla\, de\, L'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2x(1-m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{1-m^2} = \frac{1}{1-m^2}$$

y como para cada valor de la pendiente m en el haz se obtendrá un valor distinto para el límite, podemos concluir en virtud de la propiedad de unicidad del límite, que no existe el límite pedido.

(f)Como $f(x,y) = \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Tenemos que ver cuál sería el posible valor de $f(0,0)$ para poder hacer que f fuese contínua. A tal efecto necesitamos saber si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Haciendo pasar un haz de rectas por $(0,0)$, tendremos que

$$\lim_{x\to 0\; y=mx} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{3mx^2}{|x|\sqrt{1+m^2}}$$

este límite sea $x > 0$ o $x < 0$ sería $= 0$ a lo largo del haz $y = mx$ (lo cual no asegura que el límite sea 0 sino, que si existe, debería ser 0).
Por tanto, tenemos que definir $f(0,0) = 0$ y ahora demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Con esas dos condiciones quedaría probada la continuidad de f en $(0,0)$. En efecto, dado $\epsilon_{real} > 0$ trataremos de hallar $\delta(\epsilon)_{real} > 0$ tal que si

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

entonces

$$\|f(x,y) - 0\| < \epsilon$$

Ahora,

$$\|f(x,y)-0\| = |\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \frac{3|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$
$$\leq \frac{3\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

y esto será $< \epsilon$ si escogemos $\delta < \frac{\epsilon}{3}$, puesto que como $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces $\|f(x,y)-0\|$ que vimos anteriormente es $\leq 3\sqrt{x^2+y^2}$ sera $< 3\delta$ y con $\delta < \frac{\epsilon}{3}$, $3\delta < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.
Asi

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y)-0\| < \epsilon$$

(g)La respuesta es *no*, ya que según el ejercicio 2.-(e), no existe el $\lim f(x,y)$ para $(x,y) \to (0,0)$.

(h)Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) f esta definida en $(0,0)$ con $f(0,0)=0$, luego $(0,0) \in Dom(f)$.
(ii) Faltaría ver si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

y si es igual a 0.
En efecto: dado $\epsilon_{real} > 0$. Trataremos de hallar $\delta(\epsilon)_{real} > 0$ de tal modo que si

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

entonces

$$\|f(x,y)-0\| = |xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| < \epsilon$$

Ahora bien,

$$|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| \leq |x||y|\frac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|} < \sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\frac{|x^2+y^2|}{|x^2+y^2|} \leq$$
$$\leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = (\sqrt{x^2+y^2})^2$$

y como $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ de lo anterior resulta

$$\|f(x,y)-0\| < (\sqrt{x^2+y^2})^2 < \delta^2$$

y con $\delta < \sqrt{\epsilon}$ resulta

$$\|f(x,y)-0\| < \delta^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon$$

Por lo tanto, f es contínua en $(0,0)$.

Problema 4
(a)Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es f contínua en $(0,0)$?

(b)Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\operatorname{sen} y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demostrar si existe o no

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Solución
(a) En primer lugar, $f(0,0) = 0$ por definición. Restaría estudiar la existencia o no de $\lim f(x,y)$ para $(x,y) \to (0,0)$.
A tal efecto, veamos $\lim f(x,y)$, primero a lo largo del eje x (que es $y = 0$), luego a lo largo de $y = x$.

$$\lim_{x\to 0\ y=0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0\; y=x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Al ser distintos los dos valores, podemos concluir que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende al origen, no existe por contradecir la propiedad de unicidad del límite. Con esto concluimos que f no es contínua en $(0,0)$.

(b)Para $(x,y)=(0,0)$, tenemos $f(0,0)=0$, lo que implica que se debería cumplir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

Ahora, si $(x,y)\neq(0,0)$, estudiemos

$$\lim_{x\to 0\; y=mx} (\frac{1}{y}\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\operatorname{sen} y)$$

para $m\neq 0$, lo cual nos da como resultado

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{(mx)}\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\operatorname{sen}(mx)) = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{m}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{m\operatorname{sen}(mx)}{(mx)}) = \frac{1}{m} + m$$

que depende de cada valor de la pendiente m del haz de rectas.
Por tanto no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Capítulo 3

Derivadas parciales y diferenciabilidad

Objetivos

Aquí el alumno va a aprender la definición general de la derivada de una función respecto a una variable. Va a relacionar la definición de $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ con la de $\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}$. Además, va a aprender el concepto general de diferenciabilidad y las importantes relaciones entre diferenciabilidad y continuidad para funciones de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, particularmente en los casos $n = 2,\ n = 3,\ m = 1$.

3.1 Conceptos Básicos

(a) Sea: $\begin{cases} f : A_{\text{abierto}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \to f(\vec{x}) \end{cases}$
Sea $\vec{e}_j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, .., 0)$, (el 1 en la posición j-ésima). Si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_n) - f(\vec{x})}{h},$$

a ese límite se le denomina derivada parcial de f en el vector $\vec{x}$, respecto a la componente j-ésima y se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$, y, más cómodo: $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$; otras notaciones: $f'_{x_j}(\vec{x})$ ó $f'_j(\vec{x})$ o también $D_j f(\vec{x})$.

$$\text{Así que } \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : B \subset A & \to \mathbb{R} \\ \qquad \vec{x} & \to \dfrac{\partial f \vec{x}}{\partial x_j} \end{cases} , \text{ con } B = \left\{ \vec{x} \in A \mid \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h} \right\}.$$

(b) *Definición:* Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f *es diferenciable* en $\vec{x_0} \in A$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:
(i) $\exists\ \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}$ en $\vec{x}_0 = (a_1, ..., a_n)$.
(ii) si existe y se hace cero el siguiente límite

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\left| \ f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j}(x_j - a_j) \ \right|}{\| \ \vec{x} - \vec{x}_0 \ \|} = 0.$$

En el caso particular $n=2,\ \vec{x}=(x,y),\ \vec{x}_0=(x_0,y_0)$ y quedaría f diferenciable en $(x_0,y_0) \Leftrightarrow$
(i) $\exists\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ en (x_0,y_0).
(ii) si existe y se hace cero el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)-\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0)\right|}{\|\ (x,y)-(x_0,y_0)\ \|}=0,$$

donde $\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$ significa $f_x(x,y)$ evaluado en (x_0,y_0), etc.

(c) Sea $F:\begin{cases} A_{abierto}\subset\mathbb{R}^n & \to\mathbb{R}^m\\ \vec{x}=(x_1,\ldots,x_n) & \to F(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),\ldots,f_m(\vec{x}))\end{cases}$ con $f_i:\begin{cases} A\subset\mathbb{R}^n & \to\mathbb{R}\\ \vec{x} & \to f_i(\vec{x}),\end{cases}$
$i=1,\ldots,m$
Se define la matriz jacobiana de F, con $F=(f_1,\ldots,f_n)^t$ a la matriz de orden $m\times n$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

y se le llama *la derivada de* F y se denota por $\mathrm{D}F$.
Así que para $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}F(\vec{x})$ es la *derivada de* F en $\vec{x}$ con $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t$. En el caso particular $m=1$, $\mathrm{D}F(\vec{x})=\nabla f(\vec{x})=\mathrm{grad} f(\vec{x})$. (En algunos textos, *la derivada* de f se llama *diferencial* de f).

(d) Sea $A_{abierto}\subset\mathbb{R}^n$ y $F:A\to\mathbb{R}^m$, F es diferenciable en $\vec{x}_0\in A$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:
(i) $\exists\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en $\vec{x}_0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$
(ii) si existe y se anula el siguiente límite

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\|F(\vec{x})-F(\vec{x}_0)-(\mathrm{D}F(\vec{x}))_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0)\|}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}=0,$$

donde $(\mathrm{D}F(\vec{x}))_{\vec{x}_0}$ significa matriz Jacobiana de F evaluada en $\vec{x}_0$.

(e) *Teoremas*
(i) Si $F:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, F diferenciable en $\vec{x}_0\in A\Rightarrow F$ es continua en $\vec{x}_0$ (o sea $F\in\mathcal{C}^0(\vec{x}_0)$),
(ii) Si existen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j},\ (i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n)$ y además continuas en vecindad V de $\vec{x}_0$ (por ejemplo en un disco abierto de centro $\vec{x}_0$) $\Rightarrow F$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.
Las hipótesis de este teorema (a la izquierda de $\Rightarrow$) se denotan: $F\in\mathcal{C}^1(V(\vec{x}_0))$.
Los teoremas (i) y (ii) se pueden resumir en:

$$F\in\mathcal{C}^1(V(\vec{x}_0))\Rightarrow F\ \text{ diferenciable en }\ \vec{x}_0\Rightarrow F\in\mathcal{C}^0(\vec{x}_0)$$

3.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular, por definición, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ para $f : \mathbb{R}^3 - \{\ (x,y,z) \ \ | \ z \neq 0\ \} \to \mathbb{R}$, con $f(x,y,z) = \cos\left(\dfrac{x+y}{3z}\right)$.

Solución
Sea $f(x,y,z) = \cos\left(\dfrac{x+y}{3z}\right)$.
Las derivadas parciales de f son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{x+h+y}{3z}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{3z}\right)}{h}\\ &\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{3z}\operatorname{sen}\left(\frac{x+h+y}{3z}\right)}{1} \overset{\text{por continuidad de la funcion seno}}{=} \frac{-1}{3z}\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{3z}\right).\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{x+y+h}{3z}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{3z}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{3z}\operatorname{sen}\left(\frac{x+y+h}{3z}\right)}{1} = \frac{-1}{3z}\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{3z}\right).\end{aligned}$$

Se deja al lector comprobar que: $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{x+y}{3z^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{3z}\right)$.

Problema 2
Dada: $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)$, y, suponiendo que existen, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(2,1)$.

Solución
Sea $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right)$.
.
Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}\ \frac{\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)(x+\sqrt{x^2-y^2})-\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)(x-\sqrt{x^2-y^2})}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x^2-y^2}-x)(x+\sqrt{x^2-y^2})+\ \ (\sqrt{x^2-y^2}-x)(x+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})} \\
&= \frac{2(\sqrt{x^2-y^2}-x)(x+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})} = -\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} \; \frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} - (x-\sqrt{x^2-y^2})\left(-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})}\left[y(x+\sqrt{x^2-y^2}+x-\sqrt{x^2-y^2})\right] \\
&= \frac{2xy}{\sqrt{x^2-y^2}(x^2-x^2+y^2)} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}
\end{aligned}
$$

Finalmente, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,1)} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2,1)} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Problema 3

Con $z = \ln(x^2\sqrt{1+y^2})$, demostrar que: $\mathrm{D}z_{(2,-1)} = (1,-1/2)$, siendo $\mathrm{D}z_{(x,y)}$ la matriz Jacobiana de z evaluada en (x,y).

Solución

$\mathrm{D}\, z_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & , & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}_{1\times 2}$ ya que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $z = f(x,y) = \ln(x^2\sqrt{1+y^2})$, entonces la matriz Jacobiana de f es de orden 1×2 (o lo que es igual, $\mathrm{D}z = \nabla z$).

Así que $\mathrm{D}z_{(x,y)} = (\nabla z)_{(x,y)} = \left(\dfrac{2x\sqrt{1+y^2}}{x^2\sqrt{1+y^2}} \quad , \quad \dfrac{\dfrac{yx^2}{\sqrt{1+y^2}}}{x^2\sqrt{1+y^2}} \right) = \left(\dfrac{2}{x} \quad , \quad \dfrac{y}{1+y^2} \right)$ y, finalmente, $\mathrm{D}z_{(2,-1)} = (1,-1/2)$.

Problema 4

Calcular ∇f para las funciones dadas a continuación:

(a) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}\frac{x}{y}}$.

(b) $f(x,y) = \left(\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}\right)^e$.

(c) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$.

(d) $z = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$ con $x^2 > y^2$.

(e) $f(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)$, en $(2,2,1)$.
(f) $f(\rho,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}^4(\theta/4)$ en $(1,\pi)$.

Solución

(a) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}\frac{x}{y}}$.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(e^{\operatorname{sen}\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}, e^{\operatorname{sen}\frac{x}{y}}\left(\cos\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{y}e^{\operatorname{sen}\frac{x}{y}}\cos\frac{x}{y}\right)\left(1, -\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = \left(\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)^e$.

$\nabla f = \left(e\left(\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)^{e-1}\frac{1}{y}, e\left(\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)^{e-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{y}\right) =$

$\frac{e}{y}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)^{e-1}\cdot\left(\cos\frac{x}{y}\right)\left(1, -\frac{x}{y}\right)$.

(c) $z = \arctan\frac{y}{x}$.

Entonces, $\nabla z = \left(\dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}, \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$.

(d) $z = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$.

Sea $\mu = \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} \Rightarrow z_x = \dfrac{\mu_x}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad z_y = \dfrac{\mu_y}{\sqrt{1-\mu^2}}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
z_x &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}} \\
&= \frac{4xy^2}{2\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}(x^2+y^2)^2\sqrt{\frac{2y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{2xy^2}{\sqrt{2}(x^2+y^2)^2|y|\sqrt{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}xy^2}{|y|(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

Comprobar que $z_y = -\dfrac{\sqrt{2}yx^2}{|y|\ \ (x^2+y^2)\ \ \sqrt{x^2-y^2}}$

Finalmente, $\nabla z = \dfrac{x\ y\ \ \sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|\ \ (x^4-y^4)}(y,-x)$.

(e) $f(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)$.

$\nabla f(x,y,z) = [(y-z)(2x-y-z),(x-z)(x-2y+z),(x-y)(-y+2z-x)]$.
Luego, $\nabla f(x,y,z)_{(2,2,1)} = (1,-1,0)$.
(f) $f(\rho,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}^4(\theta/4)$.
Entonces,
$\nabla f(\rho,\theta) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) = \left(2\rho \operatorname{sen}^4(\theta/4), 4\rho^2 \dfrac{1}{4} \overset{3}{\operatorname{sen}}(\theta/4)\cos(\theta/4)\right) =$

$(2\rho \overset{4}{\operatorname{sen}}(\theta/4), \rho^2 \overset{3}{\operatorname{sen}}(\theta/4)\cos(\theta/4))$.
Por lo tanto,
$\nabla f(\rho,\theta)_{(1,\pi)} = (2\operatorname{sen}^4(\pi/4), \operatorname{sen}^3(\pi/4)\cos(\pi/4)) = \left(2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4, \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Problema 5

Sea $f(x,y) = \begin{cases} x\, y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Demostrar que f es diferenciable $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución

Tenemos que dividir la demostración en dos partes:
(a) si $(x,y) \neq (0,0)$; (b) si $(x,y) = (0,0)$.
Comencemos con la parte (a), $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f(x,y) = x\, y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
Calculemos las derivadas parciales, si existen.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \overset{\text{si existe}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\ y\ \dfrac{(x+h)^2-y^2}{(x+h)^2+y^2} - x\ y\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{h}$$

Tal límite, si existe, será de la forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que aplicando la regla de Lt'Hospital, queda:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y\dfrac{(x+h)^2-y^2}{(x+h)^2+y^2} + \ (x+h)\ y\ \dfrac{2\ (x+h)\ [(x+h)^2+y^2] - [(x+h)^2-y^2]\ 2\ (x+h)}{[(x+h)^2+y^2]^2}}{1} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} +$$

$$x\ y\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\ \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ con } (x,y)\neq(0,0).$$

De manera análoga se demuestra que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\ \dfrac{x^4\ -\ y^4\ -\ 4\ x^2\ y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Podemos admitir además, por brevedad, que f_x y f_y al ser funciones racionales son continuas $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$ y utilizando el teorema (ii) de la parte (e), concluimos que f es diferenciable $\forall\ (x,y) \neq (0,0)$.
Estudiemos ahora el caso (b) en que $(x,y) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$.
Entonces para ver si f es diferenciable en $(0,0)$ vamos a utilizar la definición (b):
Veamos si existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

$$f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h.0\dfrac{h^2-0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \text{ y}$$

$$f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0.h\dfrac{0^2-h^2}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Finalmente resta probar que

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\ f(x,y)-f(0,0)-(f_x(0,0))(x-0)-(f_y(0,0))(y-0)\ |}{\|\ (x,y)-(0,0)\ \|} = 0.$$

En efecto, tal límite sería:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\ x\ y\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0-0.x-0.y\ \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\ x\ y\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ahora bien, demostrar que tal límite da 0 es equivalente a demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$,
para lo cual utilizamos el procedimiento ε, δ :
Fijado $\varepsilon > 0$ debemos hallar δ función de $\varepsilon, \delta > 0$ tal que:

si $\|\ (x,y)-(0,0)\ \| \ = \ \sqrt{x^2+y^2} < \ \delta \Rightarrow \dfrac{\left|\ x\ y\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\ \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon.$

Veamos:

$$\frac{\left|\ x\ y\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \leq \ \frac{|\ x\ |\ |\ y\ |\ \left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \leq \ \frac{|\ x\ |\ |\ y\ |}{\sqrt{x^2+y^2}}.1 = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \leq \ \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \ \sqrt{x^2+y^2} < \ \delta.$$

Luego basta elegir $\delta < \varepsilon$ y se concluye la demostración.
Finalmente, f es diferenciable $\forall\ \ (x,y)\ \in \mathbb{R}^2$.

Problema 6

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\ y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0.0) \end{cases}$.

¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\ y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0.0) \end{cases}$.

Se demostró en el ejercicio c$2-3$(a) que f no es continua en $(0,0)$, por lo tanto, por el contrarecíproco (o negación del recíproco) del teorema (i) de la parte (e) f es discontinua en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 7

Para la función dada en el problema anterior, demuestre que existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

¿Qué conclusión se puede sacar de los ejercicios 7 y 6 ?

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h.0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0.h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

De los ejercicios 7 y 6 podemos concluir que el hecho de que existan f_x, f_y en (x,y) *no implica diferenciabilidad* allí.

Problema 8

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5\,x^2\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?. Construya las funciones de $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} \ \forall \ (x,y) \in \mathrm{Dom} f$.

Solución

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \ (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & \text{si} \ (x,y) = (0.0) \end{cases}$$

(i) Se demuestra que existe f_x, f_y en $(0,0)$ a partir de la definición de derivada parcial.

(ii) Se admite que al ser f función racional para $(x,y) \neq (0,0)$ entonces existe $f_x(x,y) = \dfrac{10\,x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{10\,x^4\,y}{(x^2+y^2)^2}$.

Por lo tanto, (i) y (ii) demuestran que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{10\,x\,y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{10\,x^4\,y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Es decir, existen f_x, f_y en vecindad de $(0,0)$. Si ahora demostramos que tales derivadas son continuas en $(0,0)$ quedará demostrado, según teorema (ii) de la parte (e) que f es diferenciable en $(0,0)$.

En efecto, bastará probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0$ y que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0) = 0$

Lo haremos con la primera de ellas:

Dado $\varepsilon > 0$ vamos a encontrar $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\| \ (x,y) - (0,0) \ \| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow 10 \ \left| \frac{x\,y^4}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| < \varepsilon,$$

$$10\left|\frac{x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 10\,\frac{|\,x\,|\,y^4}{(x^2+y^2)^2} \le 10\,\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(x^2+y^2)}^4}{(x^2+y^2)^2} = 10\,\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Así $10\left|\dfrac{x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 10\,\sqrt{(x^2+y^2)} < 10\,\delta$ y basta escoger $\delta < \varepsilon/10$.

Se deja al lector la demostración para f_y.

Problema 9

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

¿ Es f continua en $(0,0)$?

Solución

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(i) $f(0,0) = 0$ por definición.

(ii) Si calculásemos $\lim\limits_{y=mx, x\to 0} f(x,y)$ se obtendrá 0, lo cual no nos asegura que ese sea el valor del límite; en cambio con $\lim\limits_{y^2=mx, x\to 0} f(x,y) = \dfrac{m}{1+m^2}$, resultado que, al depender del parámetro m del haz de parábolas, nos asegura (por el teorema de unicidad del límite) que este límite no existe. Por lo tanto, podemos concluir que f es discontinua en $(0,0)$.

Problema 10

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{5(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Demuestre que f es discontinua en $(0,0)$.

(b) Redefinir f para que sea continua en $(0,0)$.

(c) Demuestre que para la función redefinida, existen f_x, f_y en $(0,0)$ y valen 0.

(d) Demuestre que la función redefinida no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{5(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $f(0,0) = 1$, pero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{5(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0, y=x} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{10}\lim_{x\to 0} x = 0.$$

$\Rightarrow f(\vec{x}_0) \neq \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$.

Por lo tanto, f es discontinua en $(0,0)$.

(b) Redefinimos entonces $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{5(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, ya que así $f(0,0) = 0$ y vamos a demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ vamos a hallar $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

si $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{(x^2+y^2)} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| = \dfrac{x^2|y|}{5(x^2+y^2)} < \varepsilon$.

Ahora, $\dfrac{x^2|y|}{5(x^2+y^2)} \leq \dfrac{x^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{5x^2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{(x^2+y^2)} < \dfrac{1}{5}\delta$.

Luego, basta elegir $\delta < 5\varepsilon$.

(c) Ahora, para la función f redefinida,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2 0}{5(h^2+0^2)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Análogamente para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

(d) La función f redefinida no es diferenciable en $(0,0)$.

En efecto,

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(ii) pero, si $A = \dfrac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{|x^2y|}{5\sqrt{(x^2+y^2)}(x^2+y^2)}$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} A = \frac{1}{5}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0, y=x} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\frac{x^2|x|}{x^2\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

lo que implica que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Aquí, el lector tiene la función redefinida para la cual existen $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, continua en $(0,0)$ y, sin embargo, no diferenciable en $(0,0)$.

Problema 11

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Demostrar que f_x, f_y existen $\forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y calcularlas.

(b) Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy(y^5 - x^4y)}{(x^4+y^4)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Análogamente,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^5 - y^4 x)}{(x^4+y^4)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(b) Para demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$, basta con demostrar que no es continua en $(0,0)$.

En efecto,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0,\ y=mx} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{m^2x^4}{x^4+m^4x^4} = \dfrac{m^2}{1+m^4}$, luego para cada valor de la pendiente m del haz de rectas por el origen hay un valor distinto de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ es discontinua en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 12

Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right] & , \quad x+y \neq 0 \\ 0 & , \quad x+y = 0 \end{cases}$.

(a) Demostrar que existen $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \ \forall \ (x,y)|x \neq -y$, y calcularlas.

(b) Demostrar que existen $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ en $(0,0)$, y calcularlas.

Solución

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right] & , \quad x+y \neq 0 \\ 0 & , \quad x+y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si $x \neq -y$ estamos en el caso $x+y \neq 0$, por lo tanto, se admiten que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ por ser f producto del monomio xy por la función trigonométrica seno compuesta con la función racional de imagen $\dfrac{\pi(x-y)}{2(x+y)}$.

Ahora,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) + \frac{\pi x y^2}{(x+y)^2} \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right) - \frac{\pi x^2 y}{(x+y)^2} \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2(x+y)}\right)$$

(b) Para estudiar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se necesita usar definición de derivada parcial .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h.0 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi h}{2h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Por lo tanto, $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

De manera análoga se demuestra que existe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Capítulo 4

Regla de la cadena

Objetivos

Que el alumno aprenda a manejar con destreza la regla de la cadena para la derivada de una función compuesta.

4.1 Definición

Sean G y F funciones tales que:

$G : \left\{ \begin{array}{rcl} A_{abierto} \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ X & \to & G(X) = Y \end{array} \right.$ y $F : \left\{ \begin{array}{rcl} B \subset \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^p \\ Z & \to & F(Z) \end{array} \right.$

Si Im $G \subset$ Dom F , podemos construir la compuesta

$H : \left\{ \begin{array}{rcl} A \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^p \\ X & \to & H(X) = (F \circ G)(X) = F(G(X)) \end{array} \right.$.

Ahora bien, si G es diferenciable en X_0 y F diferenciable en $Y_0 = G(X_0)$ entonces H es diferenciable en X_0 y se tiene: $(\mathrm{D}H)(X_0) = (\mathrm{D}(F \circ G))(X_0) = \mathrm{D}(F(G(X_0))\ \ \mathrm{D}G(X_0)$.

De modo que :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{p \times n} (X_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{p \times m} (Y_0) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n} (X_0).$$

4.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Sea $f(u, v, w) = u^3 - uv^3 + w^2$ con $u(x, y, z) = xy^2, v(x, y, z) = x^2y^3, w(x, y, z) = xyze^{-xyz}$. Aplicar regla de la cadena para las derivadas en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Solución

$G : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & G(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \end{array} \right.$ con $u(x, y, z) = xy^2,\ \ v(x, y, z) = x^2y^3$,
$w(x, y, z) = xyze^{-xyz}$.

Sea $f: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v,w) & \to & f(u,v,w) = u^3 - uv^3 + w^2 \end{array} \right.$ es obvio que G es diferenciable en cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ya que sus componentes son funciones polinómicas en $\mathbb{R}^3$ y f es diferenciable en cada $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ por ser f función polinómica .

Luego, si $H: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & H(x,y,z) = (f \circ G)(x,y,z) = f(G(x,y,z)) \end{array} \right.$ entonces H es diferenciable en $(x,y,z) \subset \mathbb{R}^3$ y se tiene que $(\mathrm{D}H)_{1\times 3}(x,y,z) = \mathrm{D}f(G(x,y,z))_{1\times 3}\mathrm{D}G(x,y,z)_{3\times 3}$.

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial y} & \dfrac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial y} & \dfrac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix}_{(1,1,1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 3u^2 - v^3 & -3uv^2 & 2w \end{pmatrix}_{(1,1,e^{-1})} \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & 0 \\ yz(1-xyz)e^{-xyz} & xz(1-xyz)e^{-xyz} & xy(1-xyz)e^{-xyz} \end{pmatrix}_{(1,1,1)}$$

y, finalmente, $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial y} & \dfrac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \dfrac{2}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial H}{\partial x}(1,1,1) = & 2.1 - 3.2 + \dfrac{2}{e}.0 = & -4 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}(1,1,1) = & 2.2 - 3.3 + \dfrac{2}{e}.0 = & -5 \\ \dfrac{\partial H}{\partial z}(1,1,1) = & 2.0 - 3.0 + \dfrac{2}{e}.0 = & 0 \end{array} \right., \text{ o } (\mathrm{D}H)(1,1,1) = (-4,-5,0)$$

Problema 2

Sea $f(u,v) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{v}, u = y^2 - x, v = 5x$. Suponiendo que f es diferenciable $\forall \ (u,v) \ / \ v \neq 0$. Calcular ∇f en $(x_0,y_0) = (1,2)$

Solución

Sea $f(u,v) = \dfrac{\operatorname{sen} u}{v}, u = y^2 - x, v = 5x$. Vamos a aplicar la regla de la cadena en forma práctica (lo cual se consigue cuando el lector ya domina el tema) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\cos u}{v}(-1) - \dfrac{\operatorname{sen} u}{v^2}(5)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\cos u}{v}(2y) - \dfrac{\operatorname{sen} u}{v^2}(0)$.

Ahora, $u(1,2) = 4-1 = 3, v(1,2) = 5$ y, por lo tanto, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(1,2) = \left(-\dfrac{\cos 3}{5} - 5\dfrac{\operatorname{sen} 3}{25}, \dfrac{\cos 3}{5}\right) = \left(\dfrac{-1}{5}(\cos 3 + \operatorname{sen} 3), 4\dfrac{\cos 3}{5}\right) = \dfrac{1}{5}(-\cos 3 - \operatorname{sen} 3, 4\cos 3)$.

Problema 3
Demostrar que la funcion z definida por $z = y\ln(x^2-y^2)$ satisface la ecuacion $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=0$.
Sugerencia: Tome $u = x^2-y^2, v = y$ y aplique regla de la cadena.

Solución
Sea $z = y\ln(x^2-y^2)$, queremos ver si satisface $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=0$.
En efecto: Sea $u = x^2-y^2, v = y$ asi $z = f(u,v) = v\ln u$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u}2x + (\ln u).0 = \frac{2\ x\ y}{x^2-y^2}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{u}(-2y) + (\ln u).1 = \frac{-2y^2}{x^2-y^2}+\ln(x^2-y^2)$
Ahora, $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2} = \frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\ln(x^2-y^2)-\frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2}=0$

Problema 4
Sea $z = e^{x^2+y^2}$ con $x = r\cos t, y = r\,\mathrm{sen}\,t, r\in\mathbb{R}$. Hallar $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

Solución
Sea $z = e^{x^2+y^2}$ con $x = r\cos t,\ y = r\,\mathrm{sen}\,t$.
Por lo tanto, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2xe^{x^2+y^2}(-r\,\mathrm{sen}\,t)+2xe^{x^2+y^2}r\cos t = -2r^2(\cos t)(\mathrm{sen}\,t)e^{r^2} + 2r^2(\mathrm{sen}\,t)(\cos t)e^{r^2} = 0$.
Y si queremos, la notacion matricial de la regla de la cadena sería: $z = f(x,y), x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t)$.
Asi: $\begin{cases} G:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \to & G(t) = (x,y)\end{cases}$ con $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $(x,y)\to z = f(x,y)$. Como G y f son diferenciables, construimos $h:\begin{cases}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & h(t) = f(G(t)) = f(x,y)\end{cases}$
Por lo tanto, $(\mathrm{D}h)_{(1x1)} = \mathrm{D}f(G(t))_{(1x2)}\mathrm{D}(G(t))_{(2x1)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,
que corresponde a la fórmula utilizada al comienzo del ejercicio.

Problema 5
Sea $z = u^2-v^2+2uv, u = xe^y, v = xe^{-y}$ con z,u,v funciones diferenciables en sus dominios. Utilizar la regla de la cadena pra demostrar que $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(2+e^{2y}-e^{-2y})$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2(e^{2y}+e^{-2y})$.

Solución

$z = u^2 - v^2 + 2uv; \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$
$u = xe^y, v = xe^{-y} \quad G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Sea $H : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & H(x,y) = f(G(x,y)) \end{cases}$, $\mathrm{D}H(x,y) = \mathrm{D}\ f(G(x,y))\ \mathrm{D}G(x,y)$.

Observar que $z = f(u,v) = f(u(x,y,),v(x,y))$ y $H(x,y) = f(G(x,y)) = f(u(x,y,),v(x,y))$.

Por lo tanto, $\mathrm{D}\ H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} =$

$\mathrm{D}\ f(G(x,y))\ \mathrm{D}G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (2u+2v)e^y + (-2v+2u)e^{-y} = 2x(e^y+e^{-y})e^y + 2x(e^y - e^{-y})e^{-y} \\
&= 2x(e^{2y} + 1 + 1 - e^{-2y}) = 2x(2 + e^{2y} - e^{-2y}) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = (2u+2v)(xe^y) + (-2v+2u)(-xe^{-y}) \\
&= 2x(e^y + e^{-y})xe^y + 2x(e^y - e^{-y})(-xe^{-y}) = 2x^2(e^{2y} + 1 - 1 + e^{-2y}) = 2x^2(e^{2y} + e^{-2y})
\end{aligned}$$

Así, $z_x = 2x(2 + e^{2y} - e^{-2y}), z_y = 2x^2(e^{2y} + e^{-2y})$

Problema 6

Sean $f(u,v) = \dfrac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$, $G(x,y) = (e^{xy}, e^{x+y})$. Aplicar la regla de la cadena para encontrar los valores de $\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$ en $x = \ln 3, y = 0$ con $h(x,y) = (f \circ G)(x,y)$.

Solución

$G : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & g(x,y) = (e^{xy}, e^{x+y}) \end{cases}$ y $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{(u,v)/u \neq \pm v\} & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & f(u,v) = \dfrac{u^2+v^2}{u^2-v^2} \end{cases}$

Si $\mathrm{Im}\ \ G \subset \mathrm{Dom}\ \ f$ podemos construir h.

$h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & h(x,y) = (f \circ G)(x,y) = f(g(x,y)) \end{cases}$

Así, como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser sus componentes funciones exponenciales, y además es diferenciable en su dominio, por ser función racional, se cumple que $\mathrm{D}h(x,y) = \mathrm{D}f(G(x,y))\mathrm{D}G(x,y)$.

$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$, con $u = e^{x\ y}, v = e^{x+y}$

Por lo tanto, $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\ ye^{x\ y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\ e^{x+y}$ y $\dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\ xe^{x\ y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\ e^{x+y}$

Pero, $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{2u\ (u^2 - v^2)\ -\ (u^2+v^2)\ 2u}{(u^2-v^2)^2} = \dfrac{-4\ v^2\ u}{(u^2-v^2)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{2v(u^2-v^2)\ -\ (u^2+v^2)2v}{(u^2-v^2)^2} = \dfrac{4\ u^2\ v}{(u^2-v^2)^2}$

Asi, $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{-4\ v^2\ u}{(u^2-v^2)^2}\ ye^{x\ y} + \dfrac{4\ u^2\ v}{(u^2-v^2)^2}\ e^{x+y} = \dfrac{4\ u\ v}{(u^2-v^2)^2}(-v\ y\ e^{x\ y} + u\ e^{x+y})$

$\dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{-4v^2u}{(u^2-v^2)^2}x\ e^{x\ y} + \dfrac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\ e^{x+y} = \dfrac{4\ u\ v}{(u^2-v^2)^2}(-vxe^{xy} + ue^{x+y})$

Como $u(\ln 3, 0) = 1$; $v(\ln 3, 0) = 3$, queda $\dfrac{\partial h}{\partial x}(\ln 3, 0) = \dfrac{12}{64}(-3.0.1 + 3) = \dfrac{9}{16}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(\ln 3, 0) = \dfrac{12}{64}(-3. \ln 3.1 + 1.3) = \dfrac{9}{16}(1 - \ln 3)$.

Problema 7

Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$. Mediante sustitucion en coordenadas esfericas $x = \rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$ $\quad(\rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi])$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}, \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ evaluadas en $(\rho, \theta, \varphi) = \left(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$; $\ x = \rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,\ y = \rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi,\ z = \rho\cos\varphi$.

$G : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, \varphi) & \to & G(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z) \end{cases}$

$f : \begin{cases} A \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \to & f(x, y, z) \end{cases}$

Supongamos que Im $G \subset$ Dom f, se construye $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\rho, \theta, \varphi) & \to & h(\rho, \theta, \varphi) = f(G(\rho, \theta, \varphi)) \end{cases}$

Por lo tanto, $\dfrac{\partial h}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 2x(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi + 2y(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi + 3z^2\cos\varphi$

$\dfrac{\partial h}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi + 2y\rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi$

$\dfrac{\partial h}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = 2x\rho(\cos\theta)\cos\varphi + 2y\rho(\operatorname{sen}\theta)\cos\varphi - 3z^2\rho\operatorname{sen}\varphi$

Ahora, $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\left(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) = 4 + 12\sqrt{2}$, $\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\left(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\left(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right) = 16(1 - 3\sqrt{2})$.

Obsérvese que lo que se pide en el problema es $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, lo cual es una manera simbólica de pedir $\dfrac{\partial h}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial h}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}$, puesto que $h(\rho, \theta, \varphi) = f(G(\rho, \theta, \varphi))$.

Problema 8

Sea $f(u, v) = f\left(x - \dfrac{y}{2}, x + \dfrac{y}{2}\right)$. Demostrar que si f es diferenciable y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

Solución

Sea $G : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & G(x,y) = (u,v) = \left(x - \dfrac{y}{2}, x + \dfrac{y}{2}\right) \end{cases}$ y

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & f(u,v) \end{cases}$ tal que $\mathrm{Im}\, G \subset \mathrm{Dom} f$

Se define $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & h(x,y) = f(G(x,y)) \end{cases}$

Como G es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser sus componentes $u = x - \dfrac{y}{2}$, $v = x + \dfrac{y}{2}$ funciones polinómicas y como f es diferenciable por hipótesis, se tiene: $\mathrm{D}h(x,y)_{1\times 2} = \mathrm{D}f(G(x,y))_{1\times 2}\, \mathrm{D}G(x,y)_{2\times 2}$. Así:

$\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$, ya que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

como se explicó en un ejercicio anterior.
También:

$\dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial u}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 4\left(-\dfrac{1}{4} \times 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, como se pidió.

Problema 9

Sea $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & f(x,y) \end{cases}$, diferenciable con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; sea $h(s,t) = (s+t, s-t)$, y $g = f(h)$. Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}$.

Nota: Más adelante se verá que la condición f es diferenciable y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se sustituye por $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ en virtud del *Teorema de Schwarz*.

Solución

Se hallará primero $\dfrac{\partial g}{\partial s}$.

$\dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$

ya que $\begin{cases} x &= s+t \\ y &= s-t \end{cases}$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\text{por hipotesis}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

como se quería.

Problema 10

Sea $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = y\,\Psi(x^2 - y^2)$.

Verificar que $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Sugerencia: Hacer cambio de variable $u = x^2 - y^2, z = y\,\Psi(u)$.

Solución

$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; z = y\,\Psi(x^2 - y^2)$.

Hacer $u = x^2 - y^2 \Rightarrow z = y\,\Psi(u)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}2x; \dfrac{\partial z}{\partial y} = \Psi(u) + y\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \Psi(u) - 2y^2\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}$.

Ahora, $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2xy}{x}\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\,\Psi(u) - \dfrac{2y^2}{y}\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} = 2y\dfrac{\partial\,\Psi}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\,\Psi(u) - 2y\,\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} = \dfrac{1}{y}\,\Psi(u)$,

mientras que $\dfrac{z}{y^2} = \dfrac{y\,\Psi(u)}{y^2} = \dfrac{\Psi}{y}$, con lo cual queda demostrado que $\dfrac{1}{x}z_x + \dfrac{1}{y}z_y = \dfrac{z}{y^2}$.

Capítulo 5

Derivada direccional y plano tangente

Objetivos

Aquí el alumno estudiará el importante concepto de derivada direccional, en relación con la derivada parcial y el plano tangente a una superficie en $\mathbb{R}^3$. Aprenderá a construir las distintas formas de la ecuación del plano tangente a una superficie en $\mathbb{R}^3$ según la forma que tenga el producto vectorial fundamental.

5.1 Definiciones y Teoremas

(a) *Teorema.* Si $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces existen todas las derivadas direccionales $f'(\vec{x};\vec{u})$ y se tiene que $f'(\vec{x};\vec{u}) = \nabla f(\vec{x}).\vec{u}$.

(b) *Teorema.* Si $\nabla f(\vec{x}) \neq (0,0,0)$, entonces $\nabla f(\vec{x})$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.

(c) *Teorema.* Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Sea $S = \mathrm{N_c}(f)$ la superficie de nivel de f de valor c. Si $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, entonces $\nabla f(\vec{x}_0).\vec{v} = 0$, con $\vec{v}$ un vector tangente a una trayectoria $c(t)$ en S pasando por $\vec{x}_0$. Es decir, $\nabla f(\vec{x}_0) \perp S$.

(d) *Definición. Plano tangente a una superficie de nivel.* Sea $S = \mathrm{N_c}(f)$, $\vec{x}_0 \in S$, el plano tangente a S en $\vec{x}_0$ viene dado por la ecuación:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\right)(y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}_0)\right)(z - z_0) = 0.$$

(e) *Definición.* Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f$ diferenciable en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Sea gráf $f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in A\}$. Entonces *el plano tangente a gráf* f en el punto (x_0, y_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ tiene por ecuación:

$$z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(y - y_0).$$

5.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Cuál es la dirección de más rápido crecimiento de f en $(1, -2, 1)$.?

Solución
Por el teorema (b) la dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(1, -2, 1)$.

Ahora $\nabla f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ , \ \dfrac{y}{\sqrt{x^+ y^2 + z^2}} \ , \ \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$
y $\nabla f(1, -2, 1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}} \ , \ \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \ , \ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.

Problema 2
¿ Cuál es la tasa de cambio de la función f del problema anterior en $(1, -2, 1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. ?

Solución
En virtud de la definición de derivada direccional, la respuesta es $f'\,((1, -2, 1), \vec{u}) = \nabla f(1, -2, 1).\vec{u} =$ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\, 2 = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3
Hallar un vector normal unitario a la superficie dada por $x^2\, y^3 + y^2 \ - \ z + 1 = 0$ en $(1, 2, 13)$.

Solución
$x^2\, y^3 + y^2 \ - \ z + 1 = 0, \quad P(1, 2, 13)$.

La superficie dada puede ser considerada como

$$S = \mathrm{N}_{-1}(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = x^2 y^3 + y^2 \ - \ z = -1 \right\}$$

y por teorema (c), $\nabla f(\vec{x}_0)$ es perpendicular a una trayectoria $c(t)$ en S que pasa por $\vec{x}_0 = (1, 2, 13)$. Luego, ∇f es normal a S en $\vec{x}_0$.

Así $\nabla f(x, y, z) = (2x\, y^3 \ , \ 3x^2\, y^2 + 2y \ , \ -1) \Rightarrow \nabla f(1, 2, 13) = (16 \ , \ 16 \ , \ -1)$.

Finalmente construimos el vector normal unitario;
$\dfrac{\nabla f(1, 2, 13)}{\parallel \nabla f(1, 2, 13) \parallel} = \dfrac{(16 \ , \ 16 \ , \ -1)}{\sqrt{2 \times 16^2 + 1}} = \dfrac{(16 \ , \ 16 \ , \ -1)}{\sqrt{513}}$.

Problema 4

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $x^2y^3 + y^2 - z + 1 = 0$ en $(1, 2, 13)$.

Solución

Sea la superficie $x^2y^3 + y^2 - z + 1 = 0; \vec{x}_0 = (1, 2, 13)$. La ecuación del plano tangente a S en $\vec{x}_0$ es, de acuerdo a la definición (d), $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)(y - y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}_0)(z - z_0) = 0 \Rightarrow$ $(2xy^3)_{(1,2,13)}(x-1) + (3x^2y^2+2y)_{(1,2,13)}(y-2) + (-1)_{(1,2,13)}(z-13) = 0 \Rightarrow 16(x-1)+16(y-2) - (z-13) = 0 \Rightarrow 16x + 16y - z - 35 = 0$.

O bien, si se utiliza la definición (e) queda: $z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ y con $z = f(x, y) = x^2y^3 + y^2 + 1 \Rightarrow z = 13 + 16(x-1) + 16(y-2) \Rightarrow z = 16x + 16y - 35$.

Problema 5

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1$. Suponer que en el punto $\vec{x} = (x, y)$ se tiene que $f'(\vec{x}; \vec{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$ y $f'(\vec{x}; \vec{z}) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ con $\vec{u} = \dfrac{(2\imath + 3\jmath)}{\sqrt{13}}$ y $\vec{z} = \dfrac{(\imath + \jmath)}{\sqrt{2}}$.

Hallar el conjunto de todos los puntos $\vec{x}_0 = (x, y)$ tales que $\nabla f(\vec{x}) \,.\, \dfrac{(x\imath + y\jmath)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solución

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(\vec{x}; \vec{u}) & = & f'\left(\vec{x}; \dfrac{(2\imath+3\jmath)}{\sqrt{13}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \\ f'(\vec{x}; \vec{z}) & = & f'\left(\vec{x}; \dfrac{(\imath+\jmath)}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \end{array}\right. .$$

Sea $\nabla f(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$,

por lo tanto, se obtiene de la primera ecuación: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) . \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$, y de la segunda ecuación: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} \;,\; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) . \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$.

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} 2f_x + 3f_y = 1 \\ f_x + f_y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow f_x = 5, f_y = -3.$$

Por lo tanto, $\nabla f(x, y) = (5, -3)$ y $\nabla f(x, y) \times \dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow 5x - 3y = 6$, que corresponde a la ecuación de una recta, lo cual quiere decir que los puntos pedidos son todos los que pertenecen a esta recta.

Problema 6
Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, tal que $g(x,y)=x^2\ f(x,y^2+x^3)$ siendo $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, diferenciable tal que:
(i) $f'((1,2);\jmath)=-1$.
(ii) $f'((1,2);(\imath+\jmath)/\sqrt{2})=2$.
(iii) $f(1,2)=3$.
(a) Calcular $\nabla f(1,2)$.
(b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie determinada por el gráfico de g en el punto $(1,1,3)$.

Solución
(a) Como $f'((1,2);\jmath)=-1$ y $f'((1,2);(\imath+\jmath)/\sqrt{2})=2$, se tiene:

$$\begin{cases} \nabla f(1,2).(0,1)=f_x\times 0+f_y\times 1=-1 \\ \nabla f(1,2).\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\dfrac{f_x}{\sqrt{2}}+\dfrac{f_y}{\sqrt{2}}=2. \end{cases} \Leftrightarrow f_x=1+2\sqrt{2}, f_y=-1.$$

Por lo tanto, $\nabla f(1,2)=(1+2\sqrt{2}\ \ ,\ -1)$.
(b) Por (iii), $f(1,2)=3\Rightarrow g(1,1)=1^2f(1,1^2+1^3)=f(1,2)=3$.
$\nabla g(x,y)=((2x)f(u,v)+x^2\frac{\partial f}{\partial x},x^2\frac{\partial f}{\partial y})$.
Ahora bien, $x=1\ \Rightarrow\ u=x=1;\ \ y=1\ \Rightarrow\ v=y^2+x^3=2$
Así
$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=3x^2=3,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y=2$
Por lo tanto
$\nabla g(1,2)=\left(2(3)+\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2)+3\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2),0\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2)+2\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2)\right)=$
$\nabla g(1,2)=(6+1+2\sqrt{2}+3(-1),2(-1))=(4+2\sqrt{2},-2)$
Luego la ecuación del plano tangente viene dada por

$$\begin{aligned} z &= g(1,1)+\nabla g(1,2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}=3+(2f(1,2)+1+2\sqrt{2},-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= 3+(4+2\sqrt{2})(x-1)-2(y-1) \end{aligned}$$

Finalmente $z=3+(4+2\sqrt{2})x-4-2\sqrt{2}-2y+2=1-2\sqrt{2}+(4+2\sqrt{2})x-2y$ o sea

$$(4+2\sqrt{2})x-2y-z+1-2\sqrt{2}=0$$

Problema 7
Sea una superficie S de ecuación $x^4-y+z=0$. Hallar el punto $Q(a,b,1)$ en el cual el plano tangente a S es paralelo al plano de ecuación $32x-y+z=1/2$.

Solución
$S:z=y-x^4$. La ecuación del plano tangente a S en $Q(a,b,1)$ es:

$$\begin{aligned} z &= f(a,b)+\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &= 1+(-4a^3)(x-a)+1(y-b)=1-4a^3(x-a)+y-b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a S es $-4a^3x + y - z + 1 + 4a^4 - b = 0$ y la ecuación del otro plano es $64x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Ahora bien, $\vec{v}_1 = (4a^3, -1, 1); \vec{v}_2 = (64, -2, 2)$ y los dos planos serán paralelos si y solo si $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2 \Leftrightarrow (4a^3, -1, 1) = \lambda(64, -2, 2) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{4a^3}{64} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2$ y con $f(a, b) = 1 = b - a^4 \Rightarrow b = 17$.

Luego, el punto pedido es $Q(2, 17, 1)$.

Problema 8
Hallar el punto de la gráfica de f, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, en el cual el plano tangente a dicha gráfica es perpendicular a la recta intersección de los planos dados por x=y, x+y+z=0. Determinar además la ecuación del plano tangente.

Solución
$f(x, y) = x^2+2y^2; S = \text{graf} f = \{(x, y)|z = f(x, y, z) = x^2+2y^2\}$. Queremos hallar el punto de S en el cual el plano tangente es perpendicular a la recta de intersección de los planos $\left\{\begin{array}{c} x = y \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$

Ahora, $\left\{\begin{array}{lll} x = y \Rightarrow & x - y + 0.z = 0 & \Rightarrow \vec{v}_1 = (1, -1, 0) \\ & x + y + z = 0 & \Rightarrow \vec{v}_2 = (1, 1, 1) \end{array}\right.$ y $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\imath - \jmath + 2k$, el cual es un vector paralelo a la recta intersección entre los dos planos.

Y poniendo la ecuación $z = x^2 + 2y^2$ en la forma $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z = 0$, sabemos que $\nabla g(x, y, z) = (2x, 4y, -1)$ es perpendicular a S en cada $(x, y, x^2 + 2y^2)$.
Por lo tanto, $\nabla g(x, y, z) \parallel \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \Rightarrow \nabla g(x, y, z) = \lambda(-\imath - \jmath + 2k) \Rightarrow 2x = -\lambda; 4y = -\lambda; -1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1/2, x = 1/4, y = 1/8$. y $z = f(x, y) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2 = \dfrac{3}{32}$.

Así, el punto buscado es $P\left(\dfrac{1}{4}\ ,\ \dfrac{1}{8}\ ,\ \dfrac{3}{32}\right)$

Finalmente, la ecuación del plano tangente a S en P es

$$\nabla g\left(\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{3}{32}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\ ,\ y - \frac{1}{8}\ ,\ z - \frac{3}{32}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (2x\ ,\ 4y\ ,\ -1)_{(1/4\ ,\ 1/8\ ,\ 3/32)} \cdot \left(x - \frac{1}{4}\ ,\ y - \frac{1}{8}\ ,\ z - \frac{3}{32}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(y - \frac{1}{8}) - (z - \frac{3}{32}) = 0 \Rightarrow 16x + 16y - 32z = 3.$$

Nota didáctica. Es un error frecuente en este tipo de ejercicio resolver el sistema $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ x + y + z & = & 0 \end{array}\right.$, lo cual da un plano que contiene a la recta intersección, pero no da la ecuación de la recta.

Problema 9
Dada la superficie de ecuación $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$, hallar las ecuaciones de los planos tangentes que sean paralelos al plano de ecuación $x + y + z = 2$.

Solución
Sea $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2, \nabla g(x, y, z) = (4x, 2y, 2z)$.
Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el punto de contacto de un plano tangente a la superficie dada. Por lo tanto, $4x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$ será la ecuación de un plano tangente a S en P_0.
Pero, al ser el plano tangente paralelo al plano de ecuación $x + y + z = 2$ resulta entonces que $\dfrac{4x_0}{1} = \dfrac{2y_0}{1} = \dfrac{2z_0}{1} \Rightarrow y_0 = 2x_0, z_0 = 2x_0$ y como $P_0 \in S$, la superficie dada, debe cumplirse también que $2x_0^2 + 4x_0^2 + 4x_0^2 = 10x_0^2 = 2 \Rightarrow x_0 = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Por lo lo tanto, $y_0 = \pm 2\dfrac{\sqrt{5}}{5}, z_0 = \pm 2\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Luego, las ecuaciones de los planos tangentes son:

$$4\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left[x - \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right] + 2\left(\pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left[y - \left(\pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right] + 2\left(\pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left[z - \left(\pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow x + y + z - \sqrt{5} = 0$ y $x + y + z + \sqrt{5} = 0$.

Problema 10
Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la supericie de ecuación $z = (\operatorname{sen} x)\cos y$ en el punto $P(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.

Solución

La ecuación del plano tangente es $x - y - 2z + 1 = 0$; la de la normal es $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{-2}$.

Problema 11
Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie dada por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, que sean paralelos al plano de ecuación $x + 4y + 6z = 0$.

Solución
Las ecuaciones de los planos tangentes son $x + 4y + 6z + 21 = 0$ y $x + 4y + 6z - 21 = 0$.

Capítulo 6

Derivadas parciales superiores y derivación implícita

Objetivos

Aprender a calcular derivadas parciales de orden superior al primero y la derivación implícita. También aprenderá la importancia del Teorema de las derivadas cruzadas.

6.1 Conceptos Básicos

(a) Sea $\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \to \quad f(\vec{x}) \end{cases}$.

En el capítulo 3 se definió $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ a la función:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : B \subset A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h}$ si existe este límite, donde $\vec{e}_j = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ con el 1 en la posición j-ésima.

De igual forma se puede definir

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) : C \subset B \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} \to \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ y esta última se lee derivada parcial segunda de f en $\vec{x}$, respecto de x_j y de x_k (en ese orden), y es igual al siguiente límite, si existe,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x} + h\vec{e}_k) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})}{h}.$$

(b) Por ejemplo, si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} : B \subset A & \to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) & \to \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \text{ si existe este limite.} \end{cases}$$

Se pueden definir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} : C \subset B & \to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) & \to \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + h, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h}, \text{ si existe este limite} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} : D \subset B & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \to \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} \end{cases} \text{, etc.}$$

(c) *Teorema de Schwarz.*

Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $f \in \mathcal{C}^2(\vec{x}_0)$ esto es, si existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ al menos y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continuas en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$. Entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $\vec{x}_0$.
Es decir, las derivadas parciales mixtas (o cruzadas) son iguales.

En 1734, Leonhard Euler demostró por primera vez ese teorema en estudios de Hidrodinámica, por lo que, en algunos textos, se encuentra este teorema como el *Teorema de Euler.*

(d) Si $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}^3(\vec{x}_0)$ se demuestra entonces que:
$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ en $\vec{x}_0$.

(e) Sea $G(x,y) = 0$ ecuación que define a y como función implícita y diferenciable respecto a x. Supongamos que $G \in \mathcal{C}^2$ y $\dfrac{\partial G}{\partial y} \neq 0$, se demuestra que :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\dfrac{\partial G}{\partial y}} \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}$$

(f) Se tienen las ecuaciones $G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$, $G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$, las cuales definen a y_1, y_2 como funciones implícitas y diferenciables respecto a x con el determinante del Jacobiano de G_1, G_2 respecto de y_1, y_2 distinto de cero. Esto es:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se demuestra que $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}$ vienen dadas como soluciones del siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}\left(\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right) + \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\right) & = & -\dfrac{\partial G_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1}\left(\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right) + \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\right) & = & -\dfrac{\partial G_2}{\partial x} \end{cases}$$

(g) Se tiene la ecuación $F(x,y,z) = 0$, la cual define a z como función implícita y diferenciable respecto de x y de y. Se quiere calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Lo haremos en los ejercicios.

(h) Se tiene $G_1(x,y,u,v) = 0, \quad G_2(x,y,u,v) = 0$ ecuaciones que definen a u y v como funciones implícitas y diferenciables de x y y. Se desea calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Lo haremos en los ejercicios.

6.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Sea $u = \sqrt{x^2+y^2}$. Suponiendo que existe, calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. con $(x,y) \neq (0,0)$.

Solución

$u = \sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{-xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{-xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

Problema 2

Demostrar que f dada por $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisface la ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \;\; \forall \;\; (x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Solución

$f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z) \neq (0,0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - 3x\,\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - 3y\,\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - 3z\,\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6}$$

Así

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\
&\quad \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}\left(3x^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + 3y^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 + 3z^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}\left(3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)\right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f satisface la ecuación de Laplace

Problema 3

Sea $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y demostrar que f satisface la ecuación de Laplace: $f_{xx} + f_{yy} = 0, (x,y) \neq (0,0)$.

Solución

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Además, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}(y^2 - x^2 + x^2 - y^2) = 0$.

Por lo tanto, f satisface la ecuación de Laplace.

Problema 4

Hallar a y c para que la función $u = ax^4 - 3x^2y^2 + cy^4$, verifique:

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$ sea divisible por $x + y$.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sea un cuadrado de la forma $(ax + by)^2$.

Solución

$u = ax^4 - 3x^2y^2 + cy^4$, . Se quiere calcular a, c para que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$ sea divisible por $x + y$ y para que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ sea un cuadrado de la forma $(ax + by)^2$.

Ahora bien,

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4ax^3 - 6xy^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -6x^2y + 4cy^3.$

Por lo tanto,

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4ax^3 + 4cy^3 - 6x^2y - 6xy^2$. Para que sea divisible por $x + y$ debe anularse para $y = -x$.

Por lo tanto,

$4ax^3 - 4cx^3 = 0 \Rightarrow a = c \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Además,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12ax^2 - 6y^2 + 12cy^2 - 6x^2 - 12xy = (12a - 6)x^2 + (12c - 6)y^2 - 12xy = (12a - 6)x^2 + (12a - 6)y^2 - 12xy \equiv (ax + by)^2 = a^2x^2 + 2\,abxy + b^2y^2 \Leftrightarrow 12a - 6 = a^2, \ \ 12a - 6 = b^2, -12 = 2ab \Leftrightarrow (12a - 6)^2 = a^2b^2, ab = -6 \Leftrightarrow (12a - 6)^2 = 36 \Rightarrow 12a - 6 = \pm 6 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 1, a = 0 \Rightarrow c = 0.$

Finalmente, las soluciones son $a = c = 1$ ó $a = c = 0$.

Problema 5

Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

(a) Demostrar que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(b) Admitir que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \ \ \forall\, (x,y) \neq (0,0)$ por ser f función racional. Demostrar que existen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$

(c) Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es discontinua en $(0,0)$ y, por lo tanto, f no pertenece a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, por lo que no podemos aplicar el teorema de Schwarz.

Solución

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a)$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(0+h)0\dfrac{(0+h)^2-0^2}{(0+h)^2+0^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0(0+h)\dfrac{0^2-(0+h)^2}{0^2+(0+h)^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0,$

(b) Admitimos que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ por ser f función racional, por lo tanto, calculando,

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$

Ahora bien:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0+h)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{h\dfrac{0^4+4\times 0^2h^2-h^4}{h^4}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h} = -1.$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{h\dfrac{h^4-4\times 0^2h^2-0^4}{h^4}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1.$

Hemos demostrado que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1.$

(c) Admitimos que existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\ \forall\ \ (x,y) \neq (0,0)$ por ser $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$ función racional.

Por lo tanto, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = (x^2-y^2)\dfrac{x^4+10x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^3}$

Ahora, ya demostramos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$. Para que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ fuese continua en $(0,0)$ se necesitaría que existiese el siguiente límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -1$, lo cual no se cumple ya que al estudiar tal límite a lo largo de un haz de rectas de la forma $y = mx$, se tiene:

$\lim\limits_{x\to 0,\ y=mx}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} x^2(1-m^2)\dfrac{x^4+10x^4m^2+x^4m^4}{x^6(1+m^2)^3} = \lim\limits_{x\to 0}(1-m^2)\dfrac{1+m^2+m^4}{(1+m^2)^3} = (1-m^2)\dfrac{1+m^2+m^4}{(1+m^2)^3}$, que depende del parámetro m, lo que implica que no existe tal límite y, por lo tanto, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ es discontinua en $(0,0)$.

Así que f no pertenece $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ y no se puede aplicar el teorema de Schwarz en $(0,0)$. En el caso de que se hubiese podido aplicar, entonces se hubiese cumplido que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ en $(0,0)$.

Problema 6

Sea $u = \cos(x+\operatorname{sen} y)$. Hallar $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$.

Solución

$u = \cos(x+\operatorname{sen} y)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = (\cos y)(-\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} y))$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-\operatorname{sen} y)(-\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} y)) - (\cos y)(\cos y)\cos(x+\operatorname{sen} y) =$ $(\operatorname{sen} y)\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} y) - (\cos^2 y)\cos(x+\operatorname{sen} y)$

Finalmente, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = (\operatorname{sen} y)\ \cos(x+\operatorname{sen} y) + (\cos^2 y)\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} y)$.

Problema 7

Sea y definida implícitamente por $G(x,y) = x^3 - y^4 - 3e^y = 0$, como función diferenciable respecto de x.

Calcular:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Suponer $\dfrac{\partial G}{\partial y} \neq 0$.

Solución

$G(x,y) = x^3 - y^4 - 3e^y = 0$,, suponer $\dfrac{\partial G}{\partial y} \neq 0$..

(a) Estamos en presencia del caso definido en (e).

Vamos a deducir la fórmula correspondiente, derivando respecto de x.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\dfrac{\partial G}{\partial y}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{3x^2}{-4y^3 - 3e^y} = \dfrac{3x^2}{4y^3+3e^y}$ suponer que $4y^3 + 3e^y \neq 0$.

Sin embargo, en un ejercicio de mayor complejidad, donde lo importante fuese conocer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ para aplicarlo en algún otro procedimiento, se podría aplicar la fórmula deducida arriba directamente o bien aplicar el siguiente procedimiento práctico.

$x^3 - y^4 - 3e^y = 0$, derivando respecto de x:

$3x^2 - 4y^3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3e^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{4y^3+3e^y}$.

(b) Vamos a calcular esta derivada de igual forma, primero deducimos la fórmula correspondiente, la aplicamos y luego lo hacemos en forma directa.

De esta manera, primero tenemos:

$\dfrac{\partial G}{\partial x}\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial G}{\partial x}\ + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$

Designemos: $H(x,y) = \dfrac{\partial G}{\partial x}\ + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ y derivando de nuevo respecto de x, obtenemos:

$\dfrac{\partial H}{\partial x}\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial H}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} +$ $\dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\ + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \dfrac{\partial G}{\partial y}\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$

Como $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ no depende de y entonces $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}$,

suponiendo que $G\in\mathcal{C}^2$ y, por lo tanto, se cumple el teorema de Schwarz.
Así

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{6x+2\times 0\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(12y^2+3e^y)\dfrac{9x^4}{(4y^3+3e^y)^2}}{-(4y^3+3e^y)}=\frac{6x(4y^3+3e^y)^2-9x^4(12y^2+3e^y)}{(4y^3+3e^y)^3}$$

Ahora si derivamos directamente la ecuación $x^3-y^4-3e^y=0$ primero respecto de x y luego respecto de x también, tenemos:

$$3x^2-4y^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3x^2}{4y^3+3e^y},$$

$$6x-12y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-4y^3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-3e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\;\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3e^y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{6x-(12y^2+3e^y)\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{4y^3+3e^y}=$$

$$\frac{6x-(12y^2+3e^y)\dfrac{9x^4}{(4y^3+3e^y)^2}}{4y^3+3e^y}=\frac{6x(4y^3+3e^y)^2-9x^4(12y^2+3e^y)}{(4y^3+3e^y)^3}.$$

Nota didáctica. Si se pide, dada la ecuación $G(x,y)=0$, con las condiciones dadas al comienzo, calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ no es aconsejable memorizar las fórmulas correspondientes, ya que lo que se desea es averiguar si el alumno entiende el procedimiento de deducir la fórmula o los de derivación implícita directa.

Problema 8

Dada y definida implícitamente por $G(x,y)=3x^5+x^2y+y^2+x-5=0$, como función diferenciable respecto de x y suponiendo $\dfrac{\partial G}{\partial y}\neq 0$, calcular: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ en el punto $(0,\sqrt{5})$.

Solución

$G(x,y)=3x^5+x^2y+y^2+x-5=0$,

Derivando respecto a x, $15x^4+2xy+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{15x^4+2xy+1}{x^2+2y}$, y derivando de nuevo respecto de x : $60x^3+2y+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(2x+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2+2y)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{60x^3+2y+4x\left(-\dfrac{15x^4+2xy+1}{x^2+2y}\right)+2\dfrac{(15x^4+2xy+1)^2}{(x^2+2y)^2}}{x^2+2y}=$$

$$=-\frac{(60x^3+2y)(x^2+2y)^2-4x(15x^4+2xy+1)(x^2+2y)+2(15x^4+2xy+1)^2}{(x^2+2y)^3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(0,\sqrt{5})}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\quad\text{y}\quad\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{(0,\sqrt{5})}=-\frac{2\sqrt{5}(2\sqrt{5})^2+2}{(2\sqrt{5})^3}=-\frac{1+20\sqrt{5}}{20\sqrt{5}}.$$

Problema 9

La ecuación $\operatorname{sen} z - xz + y - 1/2 = 0$ define a z como función implícita y diferenciable respecto de x e y. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $(1/\pi, 0, \pi/2)$.

Solución

$\operatorname{sen} z - xz + y - 1/2 = 0$. Derivando parcialmente respecto de x:

(a) $(\cos z) z_x - z - x z_x = 0 \Rightarrow z_x = \dfrac{z}{-x + \cos z}$

Derivando la ecuación dada parcialmente respecto de y.

(b)$(\cos z) z_y - x z_y + 1 = 0 \Rightarrow z_y = \dfrac{-1}{-x + \cos z} = \dfrac{1}{x - \cos z}$

Ahora, derivando (a) parcialmente respecto de x tendremos z_{xx}:

$(-\operatorname{sen} z) z_x \times z_x + (\cos z) z_{xx} - z_x - z_x - x z_{xx} = 0 \Rightarrow z_{xx} = \dfrac{2z_x + (z_x)^2 \operatorname{sen} z}{-x + \cos z} = \dfrac{2z(-x + \cos z) + z^2 \operatorname{sen} z}{(-x + \cos z)^3}$

Derivando (b)parcialmente respecto a y tendremos z_{yy}

$(-\operatorname{sen} z) z_y \times z_y + (\cos z) z_{yy} - x z_{yy} = 0 \Rightarrow z_{yy} = \dfrac{(\operatorname{sen} z)(z_y)^2}{-x + \cos z} = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(-x + \cos z)^3}$

Y derivando (b) parcialmente respecto de x tendremos z_{xy}:

$(-\operatorname{sen} z) z_x z_y + (\cos z) z_{xy} - z_y - x z_{xy} = 0 \Rightarrow z_{xy} = \dfrac{z_y + (\operatorname{sen} z) z_x z_y}{-x + \cos z} = \dfrac{x - \cos z - z \operatorname{sen} z}{(-x + \cos z)^3}$

Finalmente, evaluando en $P(1/\pi, 0, \pi/2)$ se tiene:

$(z_x)_P = \dfrac{\pi/2}{-1/\pi} = -\dfrac{\pi^2}{2}, \ \ (z_y)_P = \dfrac{1}{1/\pi} = \pi, \ \ (z_{xx})_P = \dfrac{2\ (\pi/2)\ (-1/\pi) + \pi^2/4}{-1/\pi^3} = \dfrac{4\pi^3 - \pi^5}{4},$

$(z_{yy})_P = \dfrac{1}{-1/\pi^3} = -\pi^3, \ \ (z_{xy})_P = \dfrac{1/\pi - \pi/2}{-1/\pi^3} = \dfrac{\pi^4 - 2\pi^2}{2}.$

Problema 10

Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 + y^3 + z^3 & = & 3xyz \\ x + y + z & = & b \end{array} \right.$, suponiendo que ambas ecuaciones definen a y y z como funciones implícitas y diferenciables respecto de x. Calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

Solución

$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 + y^3 + z^3 & = & 3xyz \\ x + y + z & = & b \end{array} \right. .$

Derivando ambas ecuaciones respecto a x,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + 3y^2 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3z^2 \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 3yz \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} - 3xz \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3xy \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (3y^2 - 3xz) \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (3z^2 - 3xy) \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & 3yz - 3x^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & -1 \end{array} \right.$$

Suponiendo que $\begin{vmatrix} 3(y^2-xz) & 3(z^2-xy) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(y^2-xz-z^2+xy) \neq 0$ y resolver el último sistema respecto de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

De la segunda ecuación $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y entrando en la primera ecuación

$3(y^2-xz)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3(z^2-xy)\left(-1-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 3(yz-x^2)$

Por lo tanto,

$[3(y^2-xz)-3(z^2-xy)]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(yz-x^2+z^2-xy) \Rightarrow$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y(z-x)+(z-x)(z+x)}{x(y-z)+(y-z)(y+z)} = \dfrac{(z-x)(y+z+x)}{(y-z)(x+y+z)} = \dfrac{z-x}{y-z}$

por lo que $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y-x}{z-y}$.

Problema 11

Suponiendo que el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+u & = & b^2 \\ xyzu & = & a^2 \end{array}\right.$ define a z y u como funciones implícitas y dife-
renciables respecto de x e y. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Solución

$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+u & = & b^2 \\ xyzu & = & a^2 \end{array}\right.$.

Derivando parcialmente respecto de x:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ yzu+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}u+xyz\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & -1 \\ xyu\dfrac{\partial z}{\partial x}+xyz\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & -yzu \end{array}\right. \quad \text{(I)}$$

Derivando parcialmente respecto de y:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \\ xzu+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}u+xyz\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -1 \\ xyu\dfrac{\partial z}{\partial y}+xyz\dfrac{\partial u}{\partial y} & = & -xzu \end{array}\right. \quad \text{(II)}$$

Finalmente, resolviendo los sistemas (I) y (II):

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{yu(z-x)}{xy(u-z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz(u-x)}{xy(z-u)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xu(z-y)}{xy(u-z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz(u-y)}{xy(z-u)}$ con $xy \neq 0, u \neq z$.

Problema 12

¿ La ecuación $\cos(x+y)-x^2-y^2-2=0$, define a y como función implícita de x ? Explique.

Solución

$\cos(x+y)-x^2-y^2-2=0 \Rightarrow \cos(x+y) = x^2+y^2+2 > 2$ lo cual es imposible para $x, y \in \mathbb{R}$.

Luego, la ecuación dada no define a y como función implícita de x.

Problema 13

En los ejercicios a continuación, las ecuaciones dadas están bien definidas implícitamente.

(a)$x^y - y^x = 0$. Calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(b)$z = f(x+z, y-z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

(a)$x^y - y^x = 0$. . Tomar logaritmo a ambos lados:

$y \ln x = x \ln y$, ahora derivar respecto de x:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ln x + y\frac{1}{x} = \ln y + \frac{x}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow (\ln x - \frac{x}{y})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}.$$

(b)Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{1 - \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{1 - \dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}} \text{ con } u = x+z,\ v = y-z.$$

Capítulo 7

Teorema de Taylor de orden 2

Objetivos

El alumno aprenderá la generalización de la fórmula de Taylor para funciones de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

7.1 Conceptos Básicos

(a) *Fórmula de Taylor de orden* $k = 1$. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(U)$, entonces para $\vec{x}_0 \in U$ se tiene

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + (\mathrm{D}f(\vec{x}_0))\vec{h} + R_1(x; \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)h_i + R_1(\vec{x}; \vec{x}_0)$$

con $\dfrac{R_1(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\|\vec{h}\|} \to 0$ si $\vec{h} \to 0$, donde R_1 es el residuo del polinomio de Taylor.

Observación. En el caso $k = 1, n = 2$ se tiene $\vec{x}_0 = (a, b), \vec{h} = (h, k), f(a + h, b + k) = f(a, b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + R_1((a + h, b + k), (a, b))$ con $\dfrac{R_1((a + h, b + k), (a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$ si $(h, k) \to (0, 0)$.

(b) *Fórmula de Taylor de orden* $k = 2$. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^3(U)$, entonces para $\vec{x}_0 \in U$ se tiene

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) + R_2(\vec{x}; \vec{x}_0)$$

con $\dfrac{R_2(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\|\vec{h}\|^2} \to 0$ si $\vec{h} \to 0$.

Observación. Para $n = 2$ y $k = 2, \vec{x}_0 = (a, b), \vec{h} = (h, k)$,
$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)k\right) + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2\right)$
$+ R_2((a + h, b + k), (a, b))$ con $\dfrac{R_2((a + h, b + k), (a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$ si $(h, k) \to (0, 0)$.

(c) Para $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{k+1}(U)$, se llama aproximación polinómica de Taylor de orden k en el punto $\vec{x}_0 \in U$ al polinomio de Taylor de orden k sin el residuo.

7.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$. Hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en el punto $(1,1)$ sin calcular el resto.

Solución

Recordemos que: $\vec{x} = (x,y) = (a+h, b+k) = (1+h, 1+k)$

Por lo tanto,

$$f(1+h,1+k) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)hk + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(1,1)k^2\right) + R_2$$

con $\dfrac{R_2((1,1),(h,k))}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ si $(h,k) \to (0,0)$.

Entonces, se tiene: $f(1,1) = 2$;

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x = [2x + 2x(x^2+y^2)]e^{x^2-y^2} & \Rightarrow \quad f_x(1,1) = 6 \\ f_y = [2y - 2y(x^2+y^2)]e^{x^2-y^2} & \Rightarrow \quad f_y(1,1) = -2 \\ f_{xx} = [2 + 6x^2 + 2y^2 + 2x(2x + 2x^3 + 2xy^2)]e^{x^2-y^2} & \Rightarrow \quad f_{xx}(1,1) = 22 \\ f_{yy} = [2 - 2x^2 - 6y^3 + 2y(2y - 2yx^2 - 2y^3)]e^{x^2-y^2} & \Rightarrow \quad f_{yy}(1,1) = -2 \\ f_{xy} = [-4xy + 2x(2y - 2yx^2 - 2y^3)]e^{x^2-y^2} & \Rightarrow \quad f_{xy}(1,1) = -8 \end{cases}$$

Finalmente,

$f(1+h, 1+k) = 2 + 6h - 2k + 11h^2 - 8hk - k^2 + R_2$ o bien $f(x,y) = 2 + 6(x-1) - 2(y-1) + 11(x-1)^2 - 8(x-1)(y-1) - (y-1)^2 + R_2$.

Problema 2

La ecuación $G(x,y,z) = 0$, con $G \in \mathcal{C}^3, G(0,0,3) = 0$, define a z como función implícita y diferenciable respecto a x e $y, z = f(x,y)$ alrededor de $P(0,0,3)$. Conociendo que $\dfrac{\partial G}{\partial x}(0,0,3) = -2$, $\dfrac{\partial G}{\partial y}(0,0,3) = 2$, $\dfrac{\partial G}{\partial z}(0,0,3) = 2$, escribir el polinomio de Taylor de grado 1 de $f(x,y)$ alrededor de $(0,0)$.

Solución

Sea $G(x,y,z) = 0, G(0,0,3) = 0, G_x(0,0,3) = -2, G_y(0,0,3) = G_z(0,0,3) = 2$.

Se sabe que,

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\dfrac{\partial G}{\partial z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{-2}{2} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\dfrac{\partial G}{\partial z}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{2}{2} = -1.$$

$\Rightarrow f(0,0) \approx 3 + h - k$ y recordando que $\vec{x} = (x,y) = (a+h, b+k)$ con $(a,b) = (0,0)$ resulta $\vec{x} = (x,y) = (h,k)$
Por lo tanto, $f(x,y) \approx 3 + x - y$.

Problema 3
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ tal que $f_u(4,1) = 1/8, f_v(4,1) = 1, f(4,1) = 1, f_{uu}(4,1) = 1/64, f_{uv}(4,1) = 0, f_{vv}(4,1) = 1/2$.
Si se define $F(x,y) = xf(u,v)$, con $u = x^2, v = y$, hallar el polinomio de Taylor de segundo orden para F en $(2,1)$.

Solución
$F_x = f(u,v) + x(f_u\, u_x + f_v \underbrace{v_x}_{=0}) = f(u,v) + 2x^2 f_u$.

$F_y = x(f_u \underbrace{u_y}_{=0} + f_v\, v_y) = xf_v$

$F_{xx} = (f_u\, u_x + f_v \underbrace{v_x}_{=0}) + 4xf_u + 2x^2(f_{uu}\, u_x + f_{uv} \underbrace{v_x}_{=0}) = 2xf_u + 4xf_u + 4x^3 f_{uu}$.

$F_{yy} = x(f_{vu} \underbrace{u_y}_{=0} + f_{vv}\, v_y) = xf_{vv}$.

$F_{yx} = f_v + x(f_{vu}\, u_x + f_{vv} \underbrace{v_x}_{=0}) = f_v + 2x^2 f_{vu}$.

$F_{xy} = (f_u \underbrace{u_y}_{=0} + f_v\, v_y) + 2x^2(f_{uu} \underbrace{u_y)}_{=0} + f_{uv}\, v_y) = f_v + 4xf_u + 2x^2 f_{uv} = F_{yx}$.

ya que $f_{uv} = f_{vu}$ puesto que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$
Por lo tanto, $F(2+h, 1+k) = F(2,1) + F_x(2,1)h + F_y(2,1)k + \frac{1}{2}(F_{xx}(2,1)h^2 + 2F_{xy}(2,1)hk + F_{yy}(2,1)k^2) + R_2((2,1),(h,k)) = 2 + 2h + 2k + \frac{1}{2}(2h^2 + 2kh + k^2)$.

Capítulo 8

Clasificación de puntos críticos. Multiplicadores de Lagrange

Objetivos

Aquí el alumno aprenderá el estudio de puntos críticos, el uso de la fórmula de Taylor y del Algebra de valores propios para calcular Máximos, mínimos o puntos de ensilladura. Aprenderá los distintos métodos según el conjunto de definición de f sea abierto o cerrado y también el uso de los Multiplicadores de Lagrange.

8.1 Definiciones y Teoremas

(a) *Definición.* Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in U$ es un punto de mínimo local o relativo de f si existe una vecindad $V(\vec{x}_0)$ tal que $\forall\ \ \vec{x} \in V, f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$. Para el caso en que sea mayor estricto ($>$) se le denomina punto de mínimo local estricto.

Ahora, $\vec{x}_0$ será punto de máximo local o relativo de f si existe $V(\vec{x}_0)$ tal que $\forall\ \ \vec{x} \in V$, se cumpla que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$. Si es menor estricto ($<$) será punto de máximo local estricto.

(b) *Definición.*Si $\vec{x}_0$ es un punto de mínimo local o de máximo local decimos que en $\vec{x}_0$ hay un extremo local o relativo.

(c) *Definición.* $\vec{x}_0 \in U$ es un punto crítico si $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Un punto crítico que no sea punto de extremo local se llama punto de ensilladura.

(d) *Teorema.* Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f$ diferenciable en U. Si $\vec{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\vec{x}_0$ es un punto crítico de f.

El recíproco no es cierto, es decir, $\vec{x}_0$ es un punto crítico de f no implica que $\vec{x}_0$ sea extremo local ya que puede ser un punto de ensilladura.

(e)*Teorema.* Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $f \in C^3.\vec{x}_0 \in U$, es un punto de extremo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = 0.$

ii) H $f(\vec{x}_0) = \mathrm{Hessiano de} f$ en $\vec{x}_0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} (\vec{x}_0) > 0.$

iii) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo local estricto en $\vec{x}_0$.
Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo local estricto en $\vec{x}_0$.
Sin embargo, al ser H $f(\vec{x}_0) > 0$ implica que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)$ tienen el mismo signo y, por lo tanto, se puede sustituir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)$ en (iii).

(f) Si al aplicar el teorema en (e) resulta que H $f(\vec{x}_0) < 0 \Rightarrow$ hay un punto de ensilladura en $\vec{x}_0$ y si H $f(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow$ se trata de un caso dudoso y habrá que hacer un estudio local.

Nota. En relación al último teorema,
a) Si H $f(\vec{x}_0) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)$ ó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) > 0$ se dice que Hf es *definida positiva* en $\vec{x}_0$ y ya sabemos que entoces existe un mínimo local estricto de f en $\vec{x}_0$.
b) Ahora bien, si H $f(\vec{x}_0) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)$ ó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) < 0$ se dice que Hf es *definida negativa* en $\vec{x}_0$ y ya sabemos que entonces existe un máximo local estricto de f en $\vec{x}_0$.

Estudio alternativo utilizando autovalores.
Sean $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0); B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0); C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0); \Delta$ el determinante de H $f(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.
La ecuación característica asociada a la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ es, según sabemos del álgebra lineal, la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Determinante} \left(\lambda I - \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \right) &= \det \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda - A & -B \\ -B & \lambda - C \end{vmatrix} \\ = (\lambda - A)(\lambda - C) - B^2 &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = \lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta \end{aligned}$$

Sabemos además de teoría de ecuaciones que los autovalores de la matriz dada son las raíces de la ecuación característica asociada, es decir, que son λ_1 y λ_2 y éstos están relacionados con dicha ecuación por: $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C, \lambda_1 * \lambda_2 = \Delta$.
Por lo tanto, $\Delta = AC - B^2 > 0$ implica que el signo de λ_1 es el mismo que el de λ_2.
Además se cumple en este caso que $AC > B^2 \geq 0$ y el signo de A es igual al de C. De aquí se deduce la nota a) de que si λ_1 y $\lambda_2 > 0 \to$ Hf definido positivo en $\vec{x}_0$ y, por lo tanto, existe un mínimo local estricto de f en $\vec{x}_0$.
De manera análoga, se deduce la nota b) de que si λ_1 y $\lambda_2 < 0 \to$ Hf definido negativo en $\vec{x}_0$ y, por lo tanto, existe un máximo local estricto de f en $\vec{x}_0$.

(g) *Definición.* Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 (\mathrm{o} \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$.
Decimos que en $\vec{x}_0 \in U$ hay un máximo absoluto (o mínimo absoluto) de f si $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (o $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) $\forall \ \vec{x} \in U$.

Se recomienda al estudiante comparar esta definición con la de máximo o mínimo local.

(h) $B \in \mathbb{R}^n$ es acotado si $\exists M > 0, M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\vec{x}\| < M \;\; \forall \;\; \vec{x} \in B$.

(i) *Teorema.* Sea $B \in \mathbb{R}^n$, acotado y cerrado (recordar que B es cerrado si B contiene a su frontera). Sea $f : B \to \mathbb{R}, f$ continua. Entonces f alcanza valores máximos y mínimos en algunos puntos $\vec{x}_1$ y $\vec{x_2}$ de B.

(j) *Teorema.* Sea $B \in \mathbb{R}^n$, acotado y cerrado y sea $f : B \to \mathbb{R}, f$ continua y además $f \in C^1(B)$. Si f alcanza un valor máximo o mínimo en $\vec{x}_0 \in B$ entonces $\vec{x_0}$ es un punto crítico de f.

(k) *Método para hallar máximos y mínimos absolutos de f.*
i) $\nabla f(\vec{x}) = 0 \Rightarrow$ puntos críticos $\vec{x}_k$ de f en interior de B.
ii) Se hallan los puntos críticos de f en δB (frontera de B).
iii) Se calcula el valor de f evaluada en cada uno de los puntos críticos del interior y de la frontera de B.
iv) Se comparan los valores de f obtenidos en iii) y se seleccionan el mayor y el menor.

(l) *Teorema: Multiplicadores de Lagrange.*
Se tienen $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones $\in C^1(U)$.
Sea $\vec{x}_0 \in U$ y $S = \{\vec{x} \in U | g(\vec{x}) = c\} = \mathrm{N_c}(g)$.
Suponer además que $\nabla g(\vec{x}_0) \neq 0$.
Si f restringida a S tiene un máximo o un mínimo en $\vec{x}_0$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0).$$

Nota: El teorema se generaliza para S definida por k restricciones:
$g_1(\vec{x}) = c_1, g_2(\vec{x}) = c_2, \ldots, g_k(\vec{x}) = c_k$.
Entonces si f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x}_0 \in S$, existirán constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que:
$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}_0)$, siempre que los $\nabla g_i(\vec{x}_0)$ sean linealmente independientes entre sí, $i = 1, 2, \ldots, k$.

8.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Hacer el estudio de máximos. mínimos y puntos de ensilladura para las funciones dadas a continuación: (a) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 7xy$.

(b) $f(x,y) = 3x^2 + y^2$.
(c) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2$.
(d)$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz$.
(e)$f(x,y) = e^{2+y^2-x^2}$.
(f)$f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y} + xy$.
(g)$f(x,y) = x^3 - 4x^2 - 16x + y^3 - 4y^2$.

Solución
(a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 7xy \Rightarrow \nabla f(x,y) = (4x+7y, 4y+7x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+7y & = & 0 \\ 7x+4y & = & 0 \end{array} \right.$ Es un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas el cual siempre tiene la solución trivial $(0,0)$ que será solución única si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.
$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 49 \neq 0$
Por lo tanto, hay sólo un punto crítico en $(0,0)$.
Ahora,
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x+7y, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y+7x, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 7 \Rightarrow \text{H } f(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 16-49 < 0 \Rightarrow$ hay un punto de ensilladura en $(0,0)$ ya que el hessiano de $f(x,y)$ es menor que cero y no depende de (x,y). Como $(0,0)$ es el único punto crítico podemos afirmar que en $(0,0)$ hay un punto de ensilladura.
(b) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = (6x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
De nuevo el único punto crítico es el $(0,0)$.

Podemos estudiar la función sin utilizar el Hessiano, toda vez que $f(0+h, 0+k) = 3h^2+k^2 \geq 0$ con $(0+h, 0+k) \in V(0,0)$ y como $f(0,0) = 0$ resulta $f(h,k) \geq f(0,0)$ y por definición (a), en $(0,0)$ hay un mínimo (y es obvio que es absoluto).
(c) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = (4x-4y, -4x+4y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = y$.
Por lo tanto, todos los puntos de la forma (a,a) son puntos críticos de f.
Se tiene entonces, estudiando el hessiano:
$\text{H } f(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ caso dudoso.

Por lo tanto, haremos un estudio local:
Sea $\vec{x} = (a+h, a+k)$, $f(x,y) = (\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2 \Rightarrow$
$f(a+h, a+k) = (\sqrt{2}(a+h) - \sqrt{2}(a+k))^2 = (\sqrt{2}h - \sqrt{2}k)^2 = 2(h-k)^2 \geq 0$
$\Rightarrow f(a+h, a+k) \geq f(a,a) = 0$.
Lo cual qiere decir que existe un mínimo local en los puntos de la forma (a,a) y el valor del mínimo de f es $f(a,a) = 0$.
(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (2x+z, 2y, 2z+x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+z & = & 0 \\ 2y & = & 0 \\ 2z+x & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow$
$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+z & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \end{array} \right.$ y $y = 0$.
El sistema tiene única solución, la trivial $x = 0, z = 0$ por ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{x} = (0,0,0)$ es el único punto crítico.

Ahora, en este caso es fácil hacer un estudio local sin recurrir al estudio de máximos y mínimos para funciones de tres variables.
Observemos que:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2+xz \geq \frac{x^2+z^2}{2}+xz+y^2 \\ &= \frac{1}{2}(x^2+2xz+z^2)+y^2 = \frac{1}{2}(x+z)^2+y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y como $f(0,0,0)=0$ resulta $f(x,y,z)\geq 0$.

Por lo tanto, $(0,0,0)$ es un punto de mínimo local.

(e) $f(x,y)=e^{2+y^2-x^2} \Rightarrow \nabla f(x,y)=e^{2+y^2-x^2}(-2x,2y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{2+y^2-x^2}(-2+4x^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{2+y^2-x^2}(2+4y^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-4xy\; e^{2+y^2-x^2}$;

H $f(0,0)=\begin{vmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^2 \end{vmatrix}=-4e^2<0 \Rightarrow$ punto de ensilladura en $(0,0)$.

(f) Para $f(x,y)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}+xy$ se demuestra que hay un mínimo local en $(2,2,12)$.

(g) $f(x,y)=x^3-4x^2-16x+y^3-4y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y)=(3x^2-8x-16,3y^2-8y)=(0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x^2-8x-16=0 & \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4/3 \end{cases} \\ y(3y-8)=0 & \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 8/3 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos 4 puntos críticos: $A(4,0); B(4,8/3); C(-4/3,0); D(-4/3,8/3)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-8$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2 x}=6y-8$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$. H $f(x,y)=\begin{vmatrix} 6x-8 & 0 \\ 0 & 6y-8 \end{vmatrix}$

Finalmente, queda:

Puntos criticos	H$f(x,y)$	$f(x,y)$	Conclusion
$(4,0)$	<0		ensilladura
$(4,8/3)$	>0	>0	minimo local
$(-4/3,0)$	>0	<0	maximo local
$(-4/3,8/3)$	<0		ensilladura

Problema 2

Suponer que la ecuación $z^3+x^2z-2xy+4y=5$ define a z como función implícita y diferenciable respecto a x e y.

(a) Hallar ∇z en (2,2,1).

(b) Hallar los puntos críticos de z.

(c) Demostrar que z tiene en $(2,2,1)$ un punto de ensilladura.

Solución

$z^3+x^2z-2xy+4y=5$

(a) Derivando respecto de x : $3z^2\; z_x+2xz+x^2\; z_x-2y=0$ (I)

Derivando respecto de y : $3z^2\; z_y+x^2\; z_y-2x+4=0$ (II)

Así; $z_x=\dfrac{2y-2xz}{3z^2+x^2}, z_y=\dfrac{2x-4}{3z^2+x^2} \Rightarrow \nabla z(2,2,1)=(0,0)$

(b) Para hallar los puntos críticos de z hacemos $\nabla z(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow y-xz=0, x-2=0 \Rightarrow$
$x=2, y=2z$. Sustituyendo en la ecuación dada $z^3+4z-8z+8z=5 \Rightarrow z(z^2+4)=5 \Leftrightarrow z=1$
Luego $(2,2,1)$ es el único punto crítico de z.
(c) Derivando (I) respecto de x, (II) respecto de y y respecto de x, se tiene:
$6z(z_x)^2+3z^2\ z_{xx}+2z+2x\ z_x+2x\ z_x+x^2\ z_{xx}=0$ (III)
$6z(z_y)^2+3z^2\ z_{yy}+x^2\ z_{yy}=0$ (IV)
$6z(z_x)(z_y)+3z^2\ z_{xy}+2x\ z_y+x^2\ z_{xy}-2=0$ (V)
Así tenemos

de (III), $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{6z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z+4x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{3z^2+x^2}$

de (IV), $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{6z\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{3z^2+x^2}$

de (V), $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{6z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+2x\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-2}{3z^2+x^2}$

Finalmente,
H $z(2,2,1)=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right)_{(2,2,1)}=-\dfrac{4}{49}<0 \Rightarrow z$ tiene punto de ensilladura en $(2,2,1)$.

Problema 3
Hallar un punto del plano de un triángulo tal que la suma de cuadrados de distancias a los vértices sea mínima.

Solución
Colocamos un triángulo cualquiera como se indica en el dibujo (ver la figura 8.1)

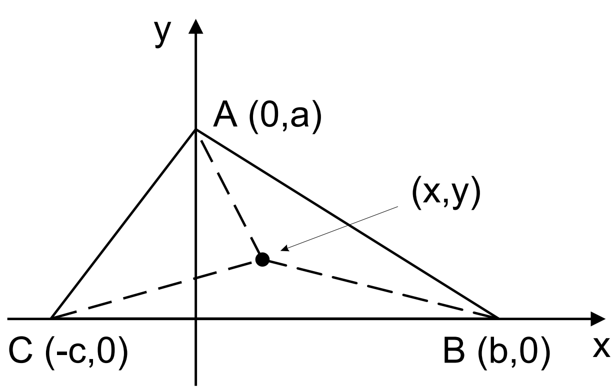

Figura 8.1:

Sea (x,y) el punto buscado, S la suma de cuadrados de distancias desde el punto (x,y) hasta los puntos A,B,C:
$S=x^2+(y-a)^2+(x-b)^2+y^2+(x+c)^2+y^2=3x^2+3y^2-2(b-c)x-2ay+a^2+b^2+c^2$

$S_x = 6x - 2(b-c), S_y = 6y - 2a, \nabla S = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{b-c}{3} \\ y &= \dfrac{a}{3} \end{cases},$

$S_{xx} = 6, S_{yy} = 6, S_{xy} = 0.$

H $S = 36 > 0$ y como $S_{xx} > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo en $\left(\dfrac{b-c}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.

Problema 4

Hallar máximos y mínimos globales (absolutos) para $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 2x - xy^2 - x^2$ con $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2 - y^2, |y| \leq \sqrt{2}\}$.

Solución

$f(x,y) = 2x - xy^2 - x^2$ con $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2 - y^2, |y| \leq \sqrt{2}\}$. (ver la figura 8.2)

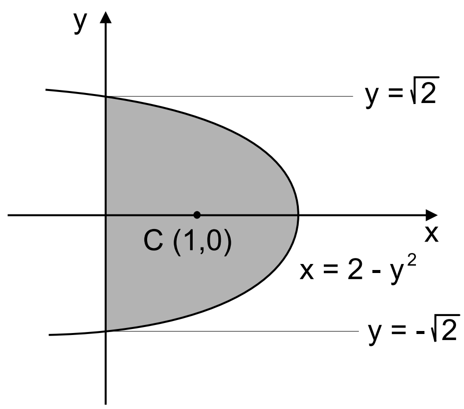

Figura 8.2:

Analizaremos el problema en dos partes:
(a) En el interior de U.
(b) En el borde de U (arco de parábola y segmento de recta).

(a)*En el interior de* U.

$\nabla f(x,y) = (2 - y^2 - 2x, -2xy) = (0,0) \leftrightarrow \begin{cases} 2 - y^2 - 2x &= 0 \\ -2xy &= 0 \end{cases}$

De la segunda $x = 0$ o $y = 0$ y de la primera $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$ o $y = 0, x = 1$.
Así tenemos tres puntos $A(0, -\sqrt{2}); B(0, \sqrt{2})$ que están en el borde y $C(1,0) \in \text{interior} U$.
Estudiemos entonces el punto $(1,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y,$

H $f(1,0) = 4 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0 \Rightarrow$ hay un máximo local en $(1,0)$ y es $f(1,0) = 1$.

(b)*En el borde de* U.

Segmento vertical AB: $x = 0, y \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow f(0,y) = 0 \to$ hay mínimos locales en el interior de AB. En los extremos $f(0, -\sqrt{2}) = 0, f(0, \sqrt{2}) = 0$ hay mínimos locales.
Finalmente, en el arco de parábola $x = 2 - y^2, f(2-y^2, y) = 2(2-y^2) - (2-y^2)y^2 - (2-y^2)^2 =$

$(2-y^2)(2-y^2)-(2-y^2)^2=0$, mínimo local.

Conclusión: Comparando los valores extremos de f tenemos:
Máximo global en $(1,0)$; $f(1,0)=1$
Mínimo global en borde de ACB y es 0.

Problema 5
Hallar los puntos críticos de f, $f(x,y)=e^{x+y}(x^3-y^3)$. Si el H $f(\vec{x}_0)=0$, examinar los valores de f en un entorno del punto crítico $\vec{x}_0$.

Solución
$$f(x,y)=e^{x+y}(x^3-y^3)\Rightarrow \nabla f(x,y)=e^{x+y}(x^3-y^3+3x^2,x^3-y^3-3y^2)=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^3-y^3+3x^2 &=& 0\\ x^3-y^3-3y^2 &=& 0\end{array}\right.$$
$\Leftrightarrow x^3-y^3+3x^2-(x^3-y^3-3y^2)=0\Leftrightarrow 3(x^2+y^2)=0\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ único punto crítico de f.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x+y}(6x^2+6x+x^3-y^3),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{x+y}(-6y^2-6y+x^3-y^3),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{x+y}(3x^2+x^3-y^3-3y^2).$$
Por lo tanto, H $f(0,0)=0$.
Vamos a hacer estudio local:
Sabemos que $f(0,0)=0$, ahora bien, para todo punto del eje $X, y=0, f(x,0)=e^x\ x^3$ y con $x>0, f(x,0)>0$ y con $x<0, f(x,0)<0$.
Por lo tanto, hay cambio de signo en vecindad de $(0,0)$.

Si se considera el eje $Y, x=0, f(o,y)=e^y(-y^3)$ se obtendrá también un cambio de signo en la vecindad de $(0,0)$.
Sin embargo, basta con encontrar una vecindad donde haya cambio de signo, así que hay punto de ensilladura en $(0,0,0)$.

Problema 6
Hallar los valores extremos locales, absolutos y puntos de ensilladura para $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ en $[0,1]\times[0,1]$.

Solución
$f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ en $[0,1]\times[0,1]$.
En el interior del cuadrado
$$\frac{\partial f}{\partial x}=y(1-x^2-y^2)+xy(-2x)=y-3x^2y-y^3.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x(1-x^2-y^2)+xy(-2y)=x-x^3-3xy^2.$$
$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y(1-3x^2-y^2)=0 &\Rightarrow& y=0 \ \text{ o } \ 1-3x^2-y^2=0\\ x(1-x^2-3y^2)=0 &\Rightarrow& x=0 \ \text{ o } \ 1-x^2-3y^2=0\end{array}\right.$$
$y=0, x=0\Rightarrow P_0(0,0)$ no pertenece al interior del cuadrado. $y=0, 1-x^2-3y^2=0\Rightarrow P_1(1,0),\ P_{1'}(-1,0)$ y $x=0, 1-3x^2-y^2=0\Rightarrow P_2(0,1),\ P_{2'}(0,-1)$. Estos puntos tampoco están en el interior del cuadrado.

Ahora, de $1-3x^2-y^2=0, 1-x^2-3y^2=0$ se tiene $y^2=1-3x^2 \Rightarrow 1-x^2-3(1-3x^2)=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$. $x=-\frac{1}{2}$ se desprecia porque no pertenece al interior del cuadrado, y queda $x=\frac{1}{2}$ en $1-3x^2-y^2=1-3/4-y^2=0 \Rightarrow P_3(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) \in$ interior del cuadrado.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1-3x^2-3y^2,$

H $f(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})=\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}=2>0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})=-\frac{3}{2}<0 \Rightarrow$ hay un máximo local en $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ y es $f(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})=\frac{1}{8}$. (ver la figura 8.3)

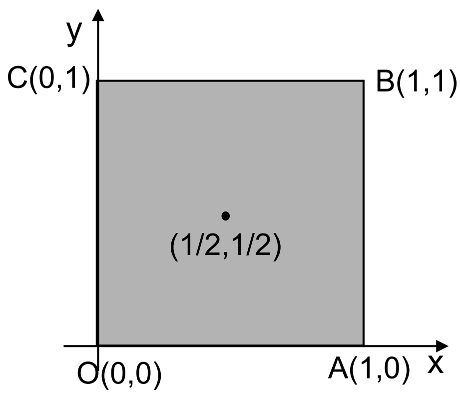

Figura 8.3:

En el borde sobre CB.
$x\in(0,1), y=1, f(x,1)=-x^3=g_1(x) \Rightarrow g_1\prime(x)=-3x^2=0 \Leftrightarrow x=0,\ g_1''(x)=-6x,\ g_1''(0)=0,\ g_1^{(3)}(x)=-6\neq 0$ y $g_1^{(4)}(x)=0$ entonces recurrimos a graficar la curva que se muestra en la figura, por lo que no existe ni máximo ni mínimo en el segmento abierto CB. (ver la figura 8.4)

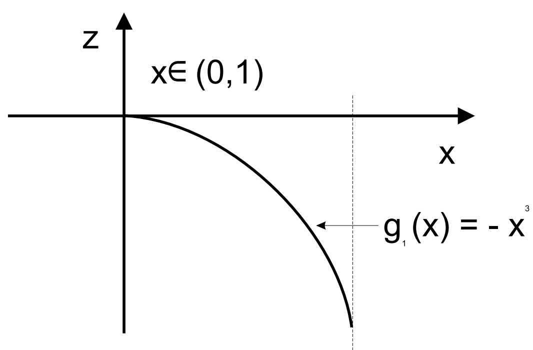

Figura 8.4:

En los extremos $x=0, x=1$ tenemos $f(0,1)=0, f(1,1)=-1 \Rightarrow$ mínimos locales.
En el borde AB
$y\in(0,1), x=1, f(1,y)=-y^3=g_2(y)$ y por analogía con $g_1(x)$ no existen valores extremos en el segmento abierto AB. Ahora, en los extremos $f(1,0)=0, f(1,1)=-1$. Por lo tanto hay mínimo local en $(1,0)$, y el otro punto ya fue estudiado en el borde CB.

En el borde OA
$x \in (0,1), y = 0, f(x,0) = 0 \Rightarrow$ mínimo local en el segmento abierto OA. Ahora, en los extremos, $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ mínimo local y $f(1,0)$ ya fue estudiado. El punto P_1 pertenece a este segmento y $f(P_1) = 0$.
En el borde OC
$x = 0, y \in (0,1), f(0,y) = 0 \Rightarrow$ mínimo local en el segmento abierto. Los extremos 0 y A ya fueron estudiados. El punto $P_2 \in$ OA.

RESUMEN.
Máximo global en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y es $\frac{1}{8}$.
Mínimo global en $(1,1)$ y es -1.
Mínimos locales en $(1,0)$, $(x,0)$ y $(0,y)$ con $x \in (0,1)$ y $y \in (0,1), (0,0), (0,1)$ y es 0.

Problema 7
Sea $f(x,y) = 1 - e^{(x-y)^2}$ y S la región cerrada de la figura. (ver la figura 8.5)

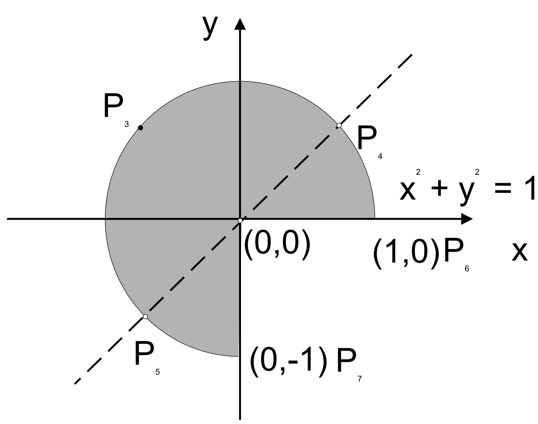

Figura 8.5:

(a) Hallar todos los puntos extremos de f en el interior de S.
(b) Hallar todos los puntos extremos de f en el borde de S.
(c) Hallar los valores extremos globales de f en S.

Solución
$f(x,y) = 1 - e^{(x-y)^2}$
(a)*En el interior de* S.
Tenemos,
$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y)e^{(x-y)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} 2(x-y)e^{(x-y)^2}$
$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y$ puesto que $e^{(x-y)^2} \neq 0$ siempre.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2e^{(x-y)^2} - 4(x-y)^2 e^{(x-y)^2}$
$dis \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{(x-y)^2} - 4(x-y)^2 e^{(x-y)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{(x-y)^2} + 4(x-y)^2 e^{(x-y)^2}$

H $f(x,x) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ caso dudoso.

Tenemos que hacer un estudio local:

$f(x,x) = 1 - 1 = 0, f(x,y) < 0$ para $x \in (0,1), y \in (0,1)$ (basta con observar la definición de f.)

Por lo tanto, $f(x,y) < f(x,x) \Rightarrow$ máximo local en todo punto del diámetro contenido en la bisectriz $y = x$, exceptuando los puntos del borde y el valor es $f(x,x) = 0$, menos en el punto $(0,0)$ que está en el borde.

(b)*En el borde de* S.

Tenemos $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0) \Leftrightarrow (0,0)$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Leftrightarrow 2(x-y)e^{(x-y)^2}(-1,1) = 2\lambda(x,y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2(x-y)e^{(x-y)^2} & = & 2\lambda x \\ 2(x-y)e^{(x-y)^2} & = & 2\lambda y \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\lambda = \dfrac{-(x-y)e^{(x-y)^2}}{x} = \dfrac{(x-y)e^{(x-y)^2}}{y} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$ con $x \neq y$ que son puntos del interior de $S \Rightarrow y = -x$ y entrando en la ecuación de condición $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ dos puntos $P_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); P_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), f(P_3) = 1 - e^2$, pero P_2 no pertenece a S.

Ahora, estudiando la posibilidad $y = x$ directamente en $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $P_4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $P_5\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ que si están en el borde de S.

Resta el estudio sobre los segmentos que van de $(0,-1)$ al $(0,0)$ y del $(0,0)$ al $(1,0)$.

Para $(0,-1)$ al $(0,0), x = 0 \Rightarrow f(0,y) = 1 - e^{y^2}, f'(0,y) = 2ye^{y^2}, f'(0,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$ que no pertenece al interior del segmento.

Sin embargo, para $(0,0), f(0,0) = 0$ y para el otro extremo $(0,-1), f(0,-1) = 1 - e < 0$. Por lo tanto, hay un mínimo local en $(0,-1)$.

Para el segmento de $(0,0)$ al $(1,0), y = 0, f(x,0) = 1 - e^{x^2}$, su estudio es análogo al de $f(0,y)$.

Para $f(1,0) = 1 - e < 0$, hay un mínimo local en $(1,0)$.

CONCLUSIONES.

(a) En el interior de S hay máximo local en $(0,0)$ y es 0.

(b) En el borde de S tenemos: $P_1(0,0);\ \ P_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \ P_4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \ P_5\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);$ $P_6(1,0); P_7(0,-1)$.

(c) Valores extremos globales de f en S:

Observar que en $P_4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), f(P_4) = 1 - 1 = 0$ mientras que $f(P_5) = f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - 1 = 0$.

Finalmente,

Máximo global de f en S es 0 en toda la diagonal y el mínimo global de f en S es $1 - e^2$ en $P_3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Problema 8

Hallar los puntos extremos de $f(x,y,z)=x+y+z$ sometida a la condición $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{a^2}{y}+\dfrac{a^2}{z}=1$ con $a>0, x>0, y>0, z>0$.

Solución

$f(x,y,z)=x+y+z, g(x,y,z)=a^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$ con $a>0, x>0, y>0, z>0$.

$\nabla g(x,y,z)=a^2\left(\dfrac{-1}{x^2}, \dfrac{-1}{y^2}, \dfrac{-1}{z^2}\right)\neq 0$ por las condiciones dadas.

Por lo tanto, $\nabla f=\lambda\nabla g \Leftrightarrow (1,1,1)=-\lambda a^2\left(\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{y^2}, \dfrac{1}{z^2}\right)\Leftrightarrow x=y=z=a\sqrt{-\lambda}>0$ y λ tiene que ser menor que 0.

Entrando en la ecuación de condición, queda:

$a^2\left(\dfrac{1}{a\sqrt{-\lambda}}+\dfrac{1}{a\sqrt{-\lambda}}+\dfrac{1}{a\sqrt{-\lambda}}\right)-1=0\Rightarrow \dfrac{3a}{\sqrt{-\lambda}}=1\Leftrightarrow 9a^2=-\lambda\Leftrightarrow \lambda=-9a^2<0$ ya que $a^2>0$.

Por lo tanto, $x=y=z=a\sqrt{9a^2}=3a^2\Rightarrow$ único punto extremo: $P(3a^2,3a^2,3a^2)$ y $f(P)=9a^2$.

Problema 9

Entre todos los triángulos rectángulos con área dada A hallar áquel cuya hipotenusa tenga el valor mínimo.

Solución

Sea ABC el triángulo rectángulo, los catetos $AC=x, CB=y$ y $AB=$hipotenusa. (ver la figura 8.6)

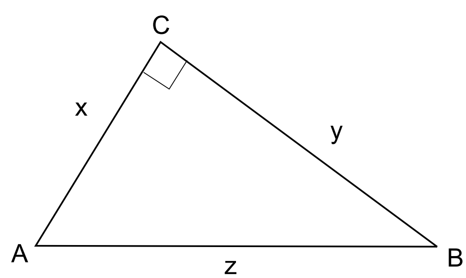

Figura 8.6:

Ahora, por la relación pitagórica: $z^2=x^2+y^2$.

Por lo tanto, tomamos $f(x,y)=x^2+y^2$ y el problema se reduce a hallar el valor mínimo de f con la condición $A=\dfrac{xy}{2}\Rightarrow xy-2A=0=g(x,y)$

$\nabla g(x,y)=(y,x)\neq(0,0)$ puesto que x e y son los catetos del triángulo.

$\nabla f=\lambda\nabla g\Leftrightarrow(2x,2y)=\lambda(y,x)\Leftrightarrow 2x=\lambda y, 2y=\lambda x$.

Resolvemos entonces el sistema,

$$\left.\begin{cases} 2x - \lambda y & = & 0 \\ 2y - \lambda x & = & 0 \\ \dfrac{xy}{2} & = & A \end{cases}\right\} \Rightarrow 2x = \lambda y, 2y = \lambda x \Rightarrow 2x^2 = \lambda xy, 2y^2 = \lambda xy \Rightarrow \frac{2x^2}{2y^2} = 1 \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Pero como $x > 0, y > 0$ por ser longitudes, $\Rightarrow x = y$ y $\dfrac{xy}{2} = A \Rightarrow x^2 = 2A$ y, por lo tanto, $x = y = \sqrt{2A}$.

Luego, la hipotenusa tendrá valor mínimo si los catetos son iguales a $\sqrt{2A}$. El triángulo es isorrectángulo.

Problema 10

Hallar los valores mínimo y máximo globales de la función $f, f(x,y) = x^2 + y^2$ en el disco D $= \left\{(x-y) | (x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 10\right\}$.

Solución

$f(x,y) = x^2 + y^2$ en D $= \left\{(x-y) | (x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 10\right\}$.

(a)*En el interior de D*

$(x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 10$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), f(0,0) = 0$. Hay mínimo local puesto que $x^2+y^2 \geq 0$.

(b)Ahora con $g(x,y) = (x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 - 10 = 0$,

$\nabla g(x,y) = (2(x-\sqrt{3}), 2(y-\sqrt{3})) \neq (0,0) \Leftrightarrow (x,y) \neq (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Por lo tanto, $(2x, 2y) = 2\lambda(x-\sqrt{3}, y-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = & 2\lambda(x-\sqrt{3}) \\ 2y & = & 2\lambda(y-\sqrt{3}) \end{cases}$

Tenemos así el sistema

$$\begin{cases} 2x & = & 2\lambda(x-\sqrt{3}) \\ 2y & = & 2\lambda(y-\sqrt{3}) \\ (x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 & = & 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) & = & -\lambda\sqrt{3} \\ y(1-\lambda) & = & -\lambda\sqrt{3} \\ (x-\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 & = & 10 \end{cases} \Rightarrow x = y = -\frac{\lambda\sqrt{3}}{1-\lambda}$$

Entrando con $x = y = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{\lambda - 1}$ en la tercera ecuación, se tiene:

$$2\left(\frac{\lambda\sqrt{3}}{\lambda-1} - \sqrt{3}\right)^2 = 10 \Rightarrow \frac{3\lambda^2}{(\lambda-1)^2} - \frac{6\lambda}{\lambda-1} + 3 = 5 \Rightarrow 3\lambda^2 - 6\lambda(\lambda-1) - 2(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-5\lambda^2 + 10\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5+\sqrt{15}}{5},\ \ \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{15}}{5},$$

Por lo tanto,

$$x_1 = y_1 = \frac{\dfrac{(5+\sqrt{15})\sqrt{3}}{5}}{\dfrac{(5+\sqrt{15})}{5} - 1} = \frac{(5+\sqrt{15})\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$

$$x_2 = y_2 = \frac{\dfrac{(5-\sqrt{15})\sqrt{3}}{5}}{\dfrac{(5-\sqrt{15})}{5} - 1} = \frac{(5-\sqrt{15})\sqrt{3}}{-\sqrt{15}}$$

Finalmente, f alcanza su máximo global en (x_1, y_1) con $x_1 = y_1 = \dfrac{(5+\sqrt{15})\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ y es $f(x_1, y_1) =$

$\frac{2}{5}(5+\sqrt{15})^2$.
Y alcanza su mínimo global en $(0,0)$ y es 0.

Problema 11

Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que esté contenida en la región limitada por los tres planos coordenados y por el plano dada por $\{(x,y,z)|ax+by+cz-1=0, \text{con} a,b,c>0\}$. Conociendo que la caja tiene 3 de sus caras apoyadas en cada uno de los planos coordenados y el vértice que no pertenece a ninguno de esas tres caras está en el conjunto antes mencionado.

Solución

(x,y,z) varía en el triángulo ABC que es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$. (ver la figura 8.7)

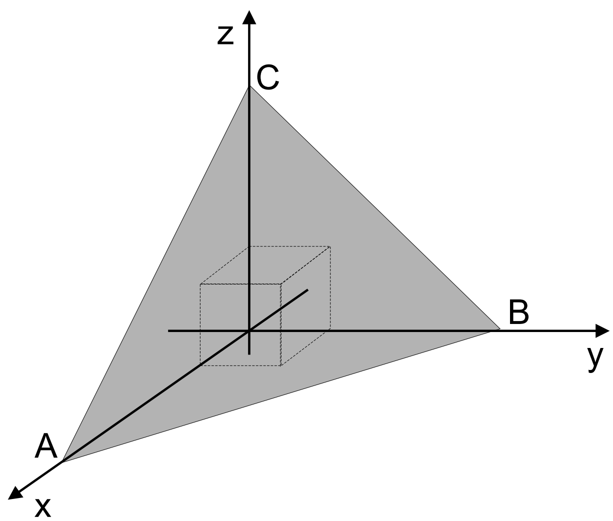

Figura 8.7:

Por lo tanto, f alcanza máximo o mínimo en él.
Es obvio que el mínimo es alcanzado para $x=0$ ó $y=0$ ó $z=0$, mientras que el máximo de $f(x,y,z)=xyz$ con $(x,y,z)\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|ax+by+cz-1=0, a,b,c>0\}$ = Plano P, se alcanza sobre la superficie dada por $g(x,y,z)=ax+by+cz-1=0$.
Ahora bien, $\nabla g(x,y,z)_{\vec{x}_0}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$ si $\vec{x}_0\in$ P.
Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange:

$\nabla f=\lambda\nabla g, g(x,y,z)=0\Rightarrow(yz,xz,xy)=\lambda(a,b,c)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} yz&=&\lambda a\\ xz&=&\lambda b\\ xy&=&\lambda c\end{array}\right.$ y con $ax+by+cz-1=0\Rightarrow\lambda=\frac{yz}{a}=\frac{xz}{b}=\frac{xy}{c}$

Como ya se descartó la posibilidad de $x=0$, ó $y=0$ ó $z=0$, queda
$x=\frac{b}{a}y, z=\frac{b}{c}y$ y sustituyendo en la cuarta ecuación, se tiene:
$a\,\frac{b}{a}y+by+c\,\frac{b}{c}y=1\Rightarrow y=\frac{1}{3b}$ y, análogamente, $x=\frac{1}{3a}, z=\frac{1}{3c}$
Por lo tanto,

$f(\frac{1}{3a}, \frac{1}{3b}, \frac{1}{3c}) = \frac{1}{27abc}$ es valor máximo de f.

Problema 12
Sea $f(x,y,z) = x + y^2, U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Hallar los puntos de U en los cuales f alcanza máximo o mínimo absolutos.

Solución
U es cerrado y acotado, lo cual implica que f alcanza valores extremos absolutos en U.
Sea $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) \neq (0,0,0)$ pero $(0,0,0)$ no pertenece a U.
Por lo tanto,
$\nabla f = \lambda \nabla g, \;\; g(x,y,z) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} (1, 2y, 0) & = & 2\lambda(x,y,z) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} 1 & = & 2\lambda x \\ 2y & = & 2\lambda y \Rightarrow y(1-\lambda) = 0 \\ 0 & = & 2\lambda z \Rightarrow \lambda = 0 \;\; \text{o} \;\; z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$
Ahora,
$\lambda = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (absurdo) de $1 = 2\lambda x$, por lo tanto, debe ser $z = 0$ y de $y(1-\lambda) = 0, \lambda = 1, x = 1/2$ y de la cuarta ecuación queda $1/4 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
Por lo tanto,
$P_1\left(\frac{1}{2}, \; \frac{\sqrt{3}}{2}, \; 0\right)$; $P_2\left(\frac{1}{2}, \; -\frac{\sqrt{3}}{2}, \; 0\right)$ con $\lambda = 1$ y $y = 0, x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \lambda = \pm 1/2 \Rightarrow P_3(1,0,0)$; $P_4(-1,0,0)$
Finalmente, los valores de P_i se resumen en la siguiente tabla:

P_i	P_1	P_2	P_3	P_4
λ	1	1	$1/2$	$-1/2$
$f(P_i)$	$5/4$	$5/4$	1	-1

Por lo tanto, hay un máximo absoluto en P_1 y P_2 y un mínimo absoluto en P_4.

Problema 13
Entre todas las cajas paralelepípedas sin tapa superior y volumen dado $V = 1372$, hallar la de área mínima.

Solución
(ver la figura 8.8 en la página 84)

$V = xyz = 1372, A = xy + 2xz + 2yz. \Rightarrow \nabla A = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y), \nabla V = (yz, xz, xy) = \lambda \nabla A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y + 2z & = & \lambda yz \\ x + 2z & = & \lambda xz \\ 2x + 2y & = & \lambda xy \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda xyz & = & xy + 2xz & \text{(I)} \\ \lambda xyz & = & xy + 2yz & \text{(II)} \\ \lambda xyz & = & 2xz + 2xy & \text{(III)} \end{array} \right.$
Además $V = xyz = 1372 \qquad$ (IV)

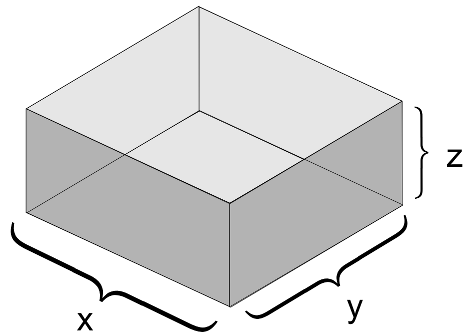

Figura 8.8:

Si $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0 \Rightarrow V = 0$ que no sirve.
Por lo tanto, $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$
De (I) y (II) se tiene que $x = y$, así como de (II) y (III) $y = 2z$. Sustituyendo en (IV) queda que $\frac{y^3}{2} = 1372 \Rightarrow y = 14, x = 14, z = 7$.
Como ya sabemos que A alcanza mínimo, entonces es en el punto $(14, 14, 7)$ con un área $A = 14 \times 14 + 2 \times 14 \times 7 + 2 \times 14 \times 7 = 588$.

Problema 14
Hallar el volumen mínimo limitado por los planos de ecuaciones $x = 0, y = 0, z = 0$ y un plano que sea tangente al elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en un punto del octante $x > 0, y > 0, z > 0$.

Solución
La ecuación del plano tangente al elipsoide dado en el punto genérico $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es $\left(\frac{2x}{a^2}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{2y}{b^2}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{2z}{c^2}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$.
Los cortes con los ejes x, y, z se hallan haciendo $y = z = 0, x = z = 0, x = y = 0$ respectivamente y se obtienen los siguientes puntos de corte: $x = \frac{a^2}{x_0}, y = \frac{b^2}{y_0}, z = \frac{c^2}{z_0}$.
Por lo tanto, hay que minimizar la función $f(x, y, z) = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ con la restricción $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.
Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange se llega a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda x & = & -\frac{1}{2}a^4b^2c^2\frac{1}{x^2yz} \\ 2\lambda y & = & -\frac{1}{2}a^2b^4c^2\frac{1}{xy^2z} \\ 2\lambda z & = & -\frac{1}{2}a^2b^2c^4\frac{1}{xyz^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\lambda x^3yz & = & a^4b^2c^2 \\ 4\lambda xy^3z & = & a^2b^4c^2 \\ 4\lambda xyz^3 & = & a^2b^2c^4 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} & = & 1 \end{array}\right.$$

El último sistema tiene como única solución: $x = |a|/3, y = |b|/3, z = |c|/3, \lambda = 3\sqrt{3}|abc|/4$ y el valor mínimo de la función f es $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}|abc|$.

Problema 15
Hallar máximos y mínimos absolutos de $f(x,y,z) = x^2 + z$ en la intersección del cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1, z = z$ con el plano de ecuación $x + z = 0$.

Solución
$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, g_2(x,y,z) = x + z, \Rightarrow \nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0), \nabla g_2(x,y,z) = (1,0,1)$.
Si la matriz $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tuviese el rango menor que 2, sería entonces: $2y = 0 = 2x \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,z)$ que no pertenece al cilindro.
Se tiene que: $\nabla f(x,y,z) = (2x, 0, 1)$ y utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange:
$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 2x & = & 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 0 & = & 2\lambda_1 y \\ 1 & = & \lambda_2 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \\ x + z & = & 0 \end{array} \right.$, de donde se obtienen los puntos P_i con $i = 1,2,3,4$.

i	1	2	3	4
P_i	$(1,0,-1)$	$(-1,0,1)$	$(1/2, \sqrt{3}/2, -1/2)$	$(1/2, -\sqrt{3}/2, -1/2)$
λ_{1i}	$1/2$	$3/2$	0	0
λ_{2i}	1	1	1	1
$f(P_i)$	0	2	$-1/4$	$-1/4$

La intersección S del plano con el cilindro es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, f es continua. Por lo tanto, f alcanza en S máximo y mínimo absolutos. Se finaliza al observar el cuadro anterior para deducir que el máximo absoluto es 2 en P_2 y el mínimo absoluto es $-1/4$ en P_3 y P_4.

Capítulo 9

Autoevaluación

9.1 Examen de autoevaluación 1.

1. Sean $A = \{(x, y) \mid 0 < xy \leq 50\}$ y el punto $P(7, 7)$. ¿ Es P punto frontera de A ?

2. ¿ Existe $\lim \dfrac{(x+y)^2}{3(x^2-y^2)}$?

3. El diferencial de f con $F(x, y) = (x + y, xy)$ en $(3, 5)$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = f(x^2 - y^2)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua.
Entonces, las curvas de nivel de la gráfica de g son:
(a) Rectas de pendiente 1.
(b) Parábolas de la forma $y = x^2 + c^2$.
(c) Circunferencias centradas en $(0, 0)$.
(d) El conjunto vacío.
(e) Hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = c$.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2 + 3xy + y^2$ que sea perpendicular a la recta de ecuación $2x = 3y - 1 = z$.

6. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i) ¿ Es f continua en $(0, 0)$.?
(ii) ¿ Es f diferenciable en $(0, 0)$.?

7. Sea $z = f(x, y)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.
Demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.
Sugerencia: derivar $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ respecto de t.

8. Usar aproximación de Taylor de grado 2 para la función dada por $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$ con

el objeto de estimar el valor de $e^{1/5}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{500}\right)$.

9. Utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange. ¿ Qué puntos de la superficie de ecuación $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$ están más cerca del eje z ?. Hallar también la distancia mínima de la superficie dada al eje z.

10. Determinar máximo y mínimo globales de $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2x$ en $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Soluciones.
1. P no es punto frontera de A.
2. No existe el límite en cuestión.
3. (c).
4. (e).
5. La ecuación del plano tangente es $18x + 12y + 36z + 1 = 0$.
6.(i) $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. (ii) $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.
8. $e^{1/5}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{500}\right) \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{500} = 0{,}002$.
9. Los puntos de la superficie dada que están más cerca del eje z son $P_3\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0\right)$ y $P_4\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ 0\right)$.
La distancia mínima al eje z se halla evaluando $f(P_3)$ y $f(P_4)$ obteniéndose $d = \dfrac{1}{2}$.
10. Máximo global $= 8$ en$(-2,0)$. Mínimo global $= -\dfrac{75}{9} \approx -8{,}3$ en $\left(\dfrac{1}{3}\ ,\ \pm\dfrac{\sqrt{35}}{3}\right)$. $(2,0)$ es punto silla.

9.2 Examen de autoevaluación 2.

1. ¿ Cuál es la mayor velocidad con la que debe decrecer la función

$$\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to \quad f(x,y,z) + \ln(x^2 - y^2 + z^2) \end{cases}$$ al acercarse el punto $M(x,y,z)$ al punto $M_0(1,1,1)$.

2. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $z = x^2 + 3xy + y^2$, que sea perpendicular a la recta de ecuación $2x = 3y - 1 = z$.

3. Sea $F(u,v) = 0$ una superficie tal que $u = xy, \ v = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Si se sabe que $F_u(1,2) = 1, \ F_v(1,2) = 2$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $G(x,y,z) = F(xy, (x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}) = 0$.

4. Sea $f(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, hallar el desarrollo de Taylor de segundo orden para f en el punto $(x_0, y_0) = (2,1)$.

5. Sean f y g funciones $\mathcal{C}^2$ con $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Se sabe que $x = -3u^2 + v, \ y = 2u + v^2$, y además $u(5,6) = 1$ y $v(5,6) = 2$.

(a) Hallar $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ en $(5,6)$, en función de las derivadas parciales de f.

(b) Sin hacer más cálculos, ¿ puede Ud. justificar si $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ en $(5,6)$? Explique.

6. Hallar máximos y mínimos absolutos (globales) de $f, \ f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en el conjunto $A = \{(x,y) \,|\, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Justifique.

7. Realice el estudio de máximos, mínimos y puntos de ensilladura para $f, \ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

Soluciones.

1. $f'((2,-2,2);(2,-2,2)/\sqrt{12}) = 2\sqrt{3}$.
2. La ecuación del plano tangente es $18x + 12y + 36z + 1 = 0$.
3. La ecuación del plano tangente es $2x + y + \sqrt{3}z - 6 = 0$.
4. $f(x,y) = 4 + 4(x-2) + (y-1) + (x-2)^2 + \dfrac{3}{8}(y-1)^2 + R_2$.
5. (a) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(5,6) = -\dfrac{1}{144}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{12}{144}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \dfrac{3}{144}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

(b) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ puesto que $f \in \mathcal{C}^2$ (Teorema de Schwarz).

6. Máximos globales en los puntos $(0,1)$; $(0,-1)$; $(1,0)$; $(-1,0)$. Mínimo global en el punto $(0,0)$.
7. Puntos de ensilladura $(3,0)$, $(-1,2)$, mínimo local en el punto $(3,2)$ y máximo local en el punto $(-1,0)$.

Parte II

Cálculo Integral

Capítulo 10

Curvas parametrizadas, longitud, integrales de línea

Objetivos

Aprender a parametrizar curvas en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$, las aplicaciones de las integrales de trayectoria y las de integrales de línea.

10.1 Definiciones y Teoremas

Definición 1. Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una función $\sigma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
(a) Si σ es diferenciable, decimos que la trayectoria es diferenciable.
(b) Si $\sigma \in \mathcal{C}^1[a,b]$, hablamos de una $\mathcal{C}^1$-Trayectoria.
(c) $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ se llaman los extremos de la trayectoria.
(d) $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n$ es una curva en $\mathbb{R}^n$.
De modo que, para $n = 2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva en $\mathbb{R}^2$, $n = 3 \Rightarrow \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ curva en $\mathbb{R}^3$, etc.

Definición 2. Sea σ una trayectoria diferenciable, $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$), entonces
$D\sigma(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^T$ (o $(x'(t), y'(t))^T$).
$D\sigma(t)$ lo designamos $\sigma'(t)$ así que

$$\sigma'(t_0) = (x_0'(t), y_0'(t), z_0'(t))^T = \lim_{h \to 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}$$

Definición 3. La integral de un campo escalar f sobre una trayectoria σ:
$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua, con $\sigma \in \mathcal{C}^1[a,b]$ e $Imagen(\sigma) \subset B$, la definimos por

$$\int_\sigma f\ ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\ dt$$

Notaciones:

$$\int_\sigma f\ ds = \int_\sigma f(x,y,z)\ ds = \int_{\mathcal{C}} f\ d\sigma$$

con $\mathcal{C}$ la curva descrita por σ.

Definición 4. Si se tiene un campo de fuerzas $F : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, F contínua sobre una trayectoria $\sigma : [a,b]\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $\sigma(t) \in B$, se define *la integral de línea de F a lo largo de σ* por

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

Notaciones:

$$\int_\sigma F \cdot d\sigma = \int_\sigma F = \int_\mathcal{C} F = \int_\mathcal{C} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

en esta última, $F = (P, Q, R)$ y $d\sigma = (\,dx,\, dy,\, dz) \Rightarrow F \cdot d\sigma = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ (y en $\mathbb{R}^2$, $F \cdot d\sigma = P\, dx + Q\, dy$).

Definición 5. Sea $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una $\mathcal{C}^1$-Trayectoria, definimos la *longitud* de σ por

$$\mathcal{L}(\sigma)_a^b = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \; dt$$

Para curvas en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}(\sigma)_a^b = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \; dt$
Para curvas en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(\sigma)_a^b = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \; dt$
Ahora bien en $\mathbb{R}^2$ si $\mathcal{C}$ esta dada por la gráfica de f, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$, entonces, la longitud de la gráfica de f en $[a,b]$ es $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \; dx$.
Finalmente, si se tiene una curva dada en forma polar por $\rho =$ función de $\theta = \rho(\theta)$, entonces

$$\mathcal{L}(\sigma)_{\theta_1}^{\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Teorema 1. Sea $f : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(B)$ y $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una $\mathcal{C}^1$-Trayectoria a trozos. Entonces se cumple que

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

10.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular analíticamente la masa M de una espiral de resorte que tiene la forma de una hélice de ecuación

$$\sigma(t) = (5\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t, 4t),\; t \in [0, 2\pi]$$

si la densidad en cada punto (x, y, z) es el cuadrado de la distancia en cada punto al origen de coordenadas.

Solución
$\sigma(t) = (5\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t, 4t),\; t \in [0, 2\pi]$
$\delta(x, y, z) = d^2((x, y, z), (0, 0, 0)) = x^2 + y^2 + z^2$
La fórmula para el cálculo de $M(\mathcal{C})$ es

$$\int_\sigma \delta(x, y, z)\; d\sigma = \int_0^{2\pi} \delta(\sigma(t))\|\sigma'(t)\| \; dt$$

$\sigma'(t) = (-5\,\mathrm{sen}\, t, 5\cos t, 4),\; t \in [0, 2\pi]$ y $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{25\,\mathrm{sen}^2\, t + 25\cos^2 t + 16} = \sqrt{41}$

$\delta(x,y,z)\|\sigma'(t)\| = (25\cos^2 t + 25\,\text{sen}^2\, t + 16t^2)\sqrt{41} \Rightarrow$

$M = \sqrt{41}\int_0^{2\pi} (25+16t^2)\ dt = \sqrt{41}\left(25t + \frac{16}{3}t^3\right)_0^{2\pi} = \sqrt{41}\left(50\pi + \frac{128}{3}\pi^3\right)$

Así

$$M = \frac{2}{3}\sqrt{41}\pi(75+64\pi^2)\ Unidades\ de\ masa.$$

Problema 2

El centro de masa de un alambre delgado de masa M, se define por (X_M, Y_M, Z_M) con

$$X_M = \frac{1}{M}\int_\sigma x\,\text{densidad}(x,y,z)\ d\sigma$$

$$Y_M = \frac{1}{M}\int_\sigma y\,\text{densidad}(x,y,z)\ d\sigma$$

$$Z_M = \frac{1}{M}\int_\sigma z\,\text{densidad}(x,y,z)\ d\sigma$$

Calcular Y_M del alambre del problema 1.

Solución

Sea $f(x,y,z) = y\delta(x,y,z)$, por tanto

$$Y_M = \frac{1}{M}\int_\sigma y\ \text{densidad}(x,y,z)\ d\sigma = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} 5(\text{sen}\,t)(25+16t^2)\sqrt{41}\ dt =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{41}\pi(75+64\pi^2)}\int_0^{2\pi} 5(\text{sen}\,t)(25+16t^2)\sqrt{41}\ dt =$$

$$\frac{15}{2\pi(75+64\pi^2)}\int_0^{2\pi}(25\,\text{sen}\,t + 16t^2\,\text{sen}\,t)\ dt = \quad \ldots(1)$$

Recordar que $\int_0^{2\pi}(\text{sen}\,t)\ dt = 0$

Ahora, $\displaystyle\int t^2\,\text{sen}\,t\ dt = -t^2\cos t - \int(-\cos t)2t\ dt = -t^2\cos t + 2\int t\cos t\ dt =$

$-t^2\cos t + 2(t\,\text{sen}\,t - \int \text{sen}\,t\ dt) = -t^2\cos t + 2t\,\text{sen}\,t + 2\cos t$

y sustituyendo en (1) se tiene:

$$Y_M = \frac{15\cdot 16}{2\pi(75+64\pi^2)}\left(-t^2\cos t + t\,\text{sen}\,t + \cos t\right)_0^{2\pi} = -\frac{60\pi\cdot 16}{2(75+64\pi^2)}$$

$$Y_M = -\frac{480\pi}{75+64\pi^2}$$

Problema 3

Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\ d\sigma = 216\int_0^{2\pi} \overset{5}{\text{sen}}\,\frac{t}{2}\ dt$$

con $\mathcal{C}$ la curva parametrizada por $\sigma(t) = 3(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$.

Solución
$\sigma(t) = 3(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \Rightarrow \quad \sigma'(t) = 3(1 - \cos t, \operatorname{sen} t)$
$\|\sigma'(t)\| = 3\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2} = 3\sqrt{2(1 - \cos t)}$
$\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y^2\ ds = \int_0^{2\pi} y^2(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\ dt = \int_0^{2\pi} 9(1 - \cos t)^2 \cdot 3\sqrt{2(1 - \cos t)}\ dt =$
$\displaystyle 27\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\sqrt{2(1 - \cos t)}\ dt = 27\int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2})^2(2\operatorname{sen}\frac{t}{2})\ dt =$

$$= 216\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}$$

Hemos utilizado la identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2} = \dfrac{1 - \cos t}{2}$.

Problema 4
Demostrar que la integral de trayectoria de $f(x, y)$, a lo largo de la trayectoria dada en Coordenadas Polares, por $\rho = \rho(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\ d\theta$$

Solución
Aquí $\sigma(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ con $\rho = \rho(\theta)\ \Rightarrow\ \sigma'(\theta) = \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta, \dfrac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta\right)$

$\|\sigma'(\theta)\| = [(\rho')^2\cos^2\theta - 2\rho'\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta + (\rho')^2\operatorname{sen}^2\theta + 2\rho'\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta]^{1/2} =$

$$\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$$

Por tanto,

$$\int_\sigma f\ ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\ d\theta$$

Problema 5
Calcular la longitud de arco de $\mathcal{C}$ dada en forma polar por $\rho = 1 + \cos\theta,\ \theta \in [0, \pi]$

Solución
$\rho = 1 + \cos\theta\ \Rightarrow \rho^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\ \Rightarrow \dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho' = -\operatorname{sen}\theta$

$\rho^2 + (\rho')^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2(1 + \cos\theta) = 2\cdot 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} =$

$4\cos^2\dfrac{\theta}{2},\ \ (\mathcal{L})_0^\pi = 2\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\ d\theta = 2\int_0^\pi \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\ d\theta =$

$$2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right] = 4$$

Problema 6
Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} y\,dx + x\,dy + z\,dz$$

con $\mathcal{C}$ la hélice dada por $\sigma(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t, t)\ t \in [0, 4\pi]$

Solución
$\sigma'(t) = (-5\operatorname{sen} t, 5\cos t, 1),\ \ F(x,y,z) = (y,x,z)\ \ \Rightarrow$
$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (5\operatorname{sen} t, 5\cos t, t) \cdot (-5\operatorname{sen} t, 5\cos t, 1) =$
$-25\operatorname{sen}^2 t + 25\cos^2 t + t = -25(1-\cos^2 t) + 25\cos^2 t + t$
$-25 + 50\cos^2 t + t = -25 + 25(1+\cos(2t)) + t\ \ \Rightarrow$

$$\int_0^{4\pi} [25\cos(2t) + t]\ dt = 8\pi^2$$

Problema 7
Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{[(x+y)\,dx - (x-y)\,dy]}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

con $\mathcal{C}$ la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 25$ recorrida en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

Solución
$x = 5\cos\theta,\ y = 5\operatorname{sen}\theta,\ \ \theta \in [0, 2\pi]$
$F(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \dfrac{y-x}{x^2+y^2}\right)$
$\sigma(\theta) = (5\cos\theta, 5\operatorname{sen}\theta),\ \sigma'(\theta) = (-5\operatorname{sen}\theta, 5\cos\theta)$
$F(\sigma(\theta)) = \dfrac{1}{5}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$
$F(\sigma(\theta)) \cdot \sigma'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta = -1$
Por tanto

$$\oint_{\mathcal{C}^+} F \cdot d\sigma = -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi$$

*Nota:*Si se sugiere el mismo problema, pero con la circunferencia en sentido horario, el resultado hubiese sido:

$$-\int_0^{2\pi} (-1)\ d\theta = 2\pi$$

Problema 8
Conociendo que $F(x,y,z) = (e^x \cos y + yz,\ xz - e^x \operatorname{sen} y,\ xy + z)$
(a) Demuestre que $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$ con $f(x,y,z) = e^x \cos y + yzx + \frac{z^2}{2}$.
(b) Calcular $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\sigma$, con $\mathcal{C}$ la curva de la figura (ver la figura 10.1)

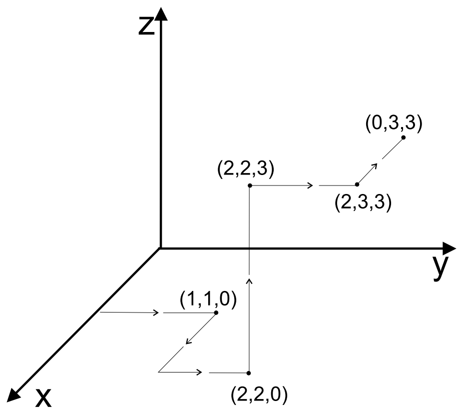

Figura 10.1:

Solución
En virtud del Teorema C9-1, como $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$:
$\displaystyle\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$,
en nuestro caso

$$\int_\sigma F \cdot ds = f(0,3,3) - f(1,0,0) =$$

$$e^0 \cos(3) + \frac{9}{2} - e = \cos(3) + \frac{9}{2} - e$$

Obsérvese lo largo y tedioso que hubiera sido, el parametrizar los segmentos que conforman la curva dada.

Problema 9
En general, el trabajo realizado por un campo de fuerzas F, $F : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobre una partícula que se mueve sobre una trayectoria $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se define por

$$\mathcal{T} = \int_\sigma F \cdot d\sigma$$

Ahora bien, sea $\mathcal{C}$ la curva itersección entre las superficies dadas por $z = x^2 + y^2$ (Paraboloide con eje z y vértice en $(0,0,0)$) y $x^2 + y^2 - 2y = 0$, con orientación positiva "$(+)$" vista desde Z^+ (lo cual quiere decir, que es observada desde la parte positiva del eje z).
Calcular el trabajo efectuado por $F(x,y,z) = (y, -x, z)$ al dar una vuelta completa a $\mathcal{C}$.

Solución

$z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
Observar que $x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 = 1$. Luego, la segunda superficie es cilíndrica, y su intersección con el plano $xy\,(z = 0)$ es la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = 0$ (ver la figura 10.2)

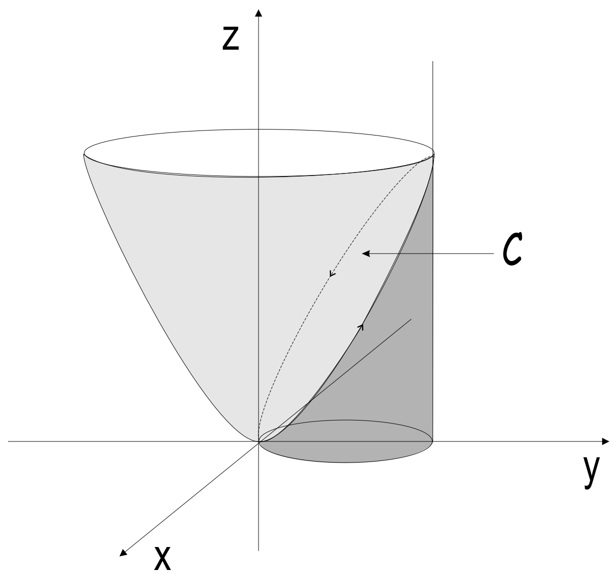

Figura 10.2:

La tendencia del alumno es la de tratar de resolver el sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, se puede hallar una parametrización de $\mathcal{C}$, observando que con $x = \cos t$, $y - 1 = \operatorname{sen} t$, para satisfacer la ecuación del cilindro, se obtiene en el paraboloide:
$z = x^2 + y^2 = \cos^2 t + (1 + \operatorname{sen} t)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} t)$

$\sigma(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 2(1 + \operatorname{sen} t))$
$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos t)$
$F(\sigma(t)) = (1 + \operatorname{sen} t, -\cos t, 2(1 + \operatorname{sen} t))$
$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = -1 - \operatorname{sen} t + 4\cos t + 2\operatorname{sen}(2t)$

$$\mathcal{T} = \int_0^{2\pi} [-1 - \operatorname{sen} t + 4\cos t + 2\operatorname{sen}(2t)]\ dt = -2\pi \quad Unidades\ de\ Trabajo.$$

Puesto que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\ dt$, $\int_0^{2\pi} \cos t\ dt$, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2t)\ dt$ valen 0.

Problema 10
Demostrar que

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 y\, dx + x^3\, dy = \frac{\pi}{8}$$

con $\mathcal{C}$ la curva "(+)" formada por el segmento de recta de $(0,0)$ a $(1,0)$, el arco de circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante y el segmento de recta de $(0,1)$ a $(0,0)$. (ver la figura 10.3 en la página 100)

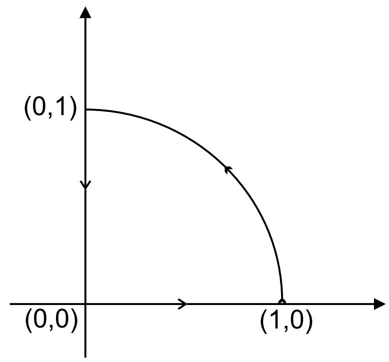

Figura 10.3:

Solución
Parametrice los dos segmentos y el arco de circunferencia
$\sigma_1(t) = (t, 0),\ \sigma_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ \sigma_3(t) = (0, t)$
y obtendrá
$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = 0$
$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = -\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t + \cos^4 t$
$F(\sigma_3(t)) \cdot \sigma_3'(t) = 0.$

$$\oint_{\mathcal{C}^+} F \cdot\ d\sigma = \int_0^{\pi/2} (-\overset{2}{\operatorname{sen}} t \cos^2 t + \cos^4 t)\ dt$$

Ahora, $\overset{2}{\operatorname{sen}} t \cos^2 t = [\operatorname{sen} t \cos t]^2 = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(2t)]^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t))$

Mientras que $\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)) =$
$\frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2t) + \frac{1+\cos(4t)}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4t)$
Por tanto

$$\oint_{\mathcal{C}^+} F \cdot\ d\sigma = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (\cos(4t) - 1)\ dt + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\right)\ dt = \frac{\pi}{8}$$

Problema 11
Calcular el trabajo efectuado por el campo $F(x, y) = (2x - y)\hat{\imath} + (y - 2x)\hat{\jmath}$ al mover una partícula a lo largo de la curva dada por $y = 2 - |3 - x|$ desde $(1, 0)$ a $(4, 1)$

Solución
$F(x, y) = (2x - y, y - 2x),\ \ y = 2 - |3 - x|$
$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & si\ x \leq 3 \\ x - 3, & si\ x > 3 \end{cases}$
Por tanto

$y_1 = 2 - (3 - x) = -1 + x$ si $x \leq 3$
$y_2 = 2 - (x - 3) = 5 - x$ si $x > 3$ (ver la figura 10.4)

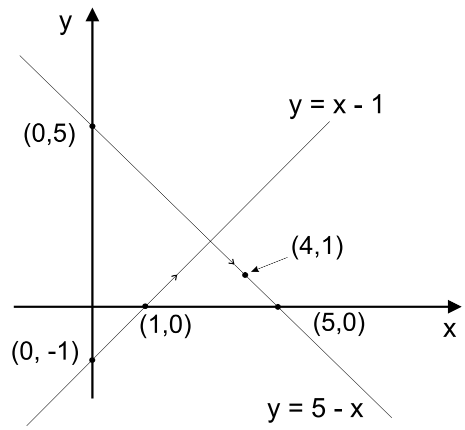

Figura 10.4:

Así $\sigma_1(t) = (t, t-1)$, $\sigma_1'(t) = (1,1)$, $F(\sigma_1(t)) = (2t - (t-1), t - 1 - 2t)$
Por tanto $F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (t+1, -t-1) \cdot (1,1) = t + 1 - t - 1 = 0$, $t \in (1,3)$

$\sigma_2(t) = (t, 5-t)$, $\sigma_2'(t) = (1,-1)$, $F(\sigma_2(t)) = (2t - (5-t), 5 - t - 2t)$
$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (3t-5, 5-3t) \cdot (1,-1) = 3t - 5 - 5 + 3t = 6t - 10$, $t \in (3,4)$

$$\mathcal{T} = -\int_1^3 0 \ dt + \int_3^4 (6t - 10) \ dt = 11 \quad \text{Unidades de Trabajo.}$$

Problema 12
Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas, $F(x,y) = (x+y)\hat{\imath} + (y-x)\hat{\jmath}$ para mover una partícula desde el punto $(2,0)$, una vuelta completa a lo largo de la curva de ecuación cartesiana $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en sentido horario "$(-)$".

Solución
(ver la figura 10.5 en la página 102)
$F(x,y) = (x+y, y-x)$
$\sigma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t)$
$\sigma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 3\cos t)$
$F(\sigma(t)) = (2\cos t + 3\operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen} t - 2\cos t)$
$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = -4(\operatorname{sen} t)(\cos t) - 6\operatorname{sen}^2 t + 9(\operatorname{sen} t)(\cos t) - 6\cos^2 t = 5(\operatorname{sen} t)(\cos t) - 6$

$$\mathcal{T} = -\int_0^{2\pi} [5(\operatorname{sen} t)(\cos t) - 6] \ dt = \int_0^{2\pi} \left[6 - \frac{5}{2}\operatorname{sen}(2t)\right] = 12\pi \quad \textit{Unidades de Trabajo.}$$

Problema 13

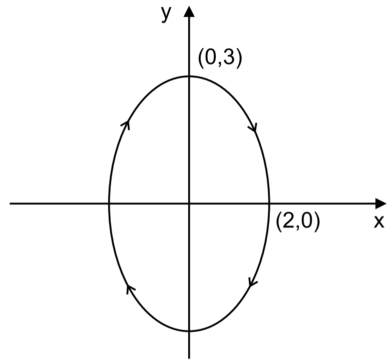

Figura 10.5:

Calcular

$$\int_{(2,2)}^{(4,6)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy$$

a lo largo de un segmento de recta desde el punto $(2,2)$ al $(4,6)$.
Nota: Hemos utilizado otra rotación $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ como la integral de línea del campo $F(x,y) = (x^2 - y,\ y^2 - x)$ a lo largo de una curva (en este caso, un segmento de recta), y se dan los puntos original y final A y B respectivamente.

Solución
Debemos hallar una parametrización del segmento de $(2,2)$ a $(4,6)$:
$\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-2}{6-2} = t \Rightarrow x - 2 = 2t,\ \ y - 2 = 4t \Rightarrow \sigma(t) = (2+2t, 2+4t),\ \ \sigma'(t) = (2,4).$
Ahora $x = 2 = 2 + 2t \Rightarrow t = 0;\ \ x = 4 = 2 + 2t \Rightarrow t = 1$
Por tanto $t \in [0,1]$ y
$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = [(2+2t)^2 - (2+4t), (2+4t)^2 - (2+2t)] \cdot (2,4) = 12 + 64t + 72t^2 = 4(3 + 16t + 18t^2) \Rightarrow$

$$\int_{(2,2)}^{(4,6)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 - x)\,dy = 4\int_0^1 (3 + 16t + 18t^2)\ \ dt = 4(3t + 8t^2 + 6t^3)_0^1 = 68$$

Problema 14
Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (x^2)\hat{\imath} + (y)\hat{\jmath}$ a lo largo de la curva de ecuación $y = |x^3|$ desde el punto $(-1,1)$ al $(1,1)$

Solución
(ver la figura 10.6 en la página 103)
$F(x,y) = (x^2, y),\ \ y = |x^3|$ de $(-1,1)$ al $(1,1)$
$y = |x^3| = \begin{cases} x^3, & si\ x \geq 0 \\ -x^3, & si\ x < 0 \end{cases}$
$\sigma_1(t) = (t, t^3),\ \ \sigma_1'(t) = (1, 3t^2),$ con $t \in [0,1]$ $F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (t^2, t^3) \cdot (1, 3t^2) = t^2 + 3t^5$

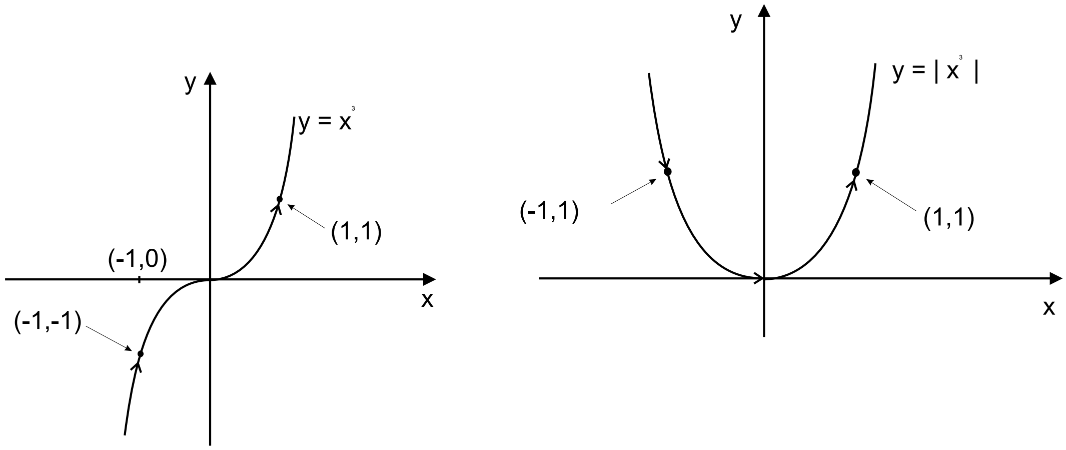

Figura 10.6:

$\sigma_2(t) = (t, -t^3)$, $\sigma_2'(t) = (1, -3t^2)$, con $t \in [-1, 0]$ $F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (t^2, -t^3) \cdot (1, -3t^2) = t^2 + 3t^5$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot \; d\sigma = \int_0^1 (t^2 + 3t^5) \; dt + \int_{-1}^0 (t^2 + 3t^5) \; dt = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^6\right)_0^1 + \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^6\right)_{-1}^0 =$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Capítulo 11

Integrales dobles. Teoremas de Fubini.

Objetivos

Aprender a definir la existencia o no de una integral doble, a calcular las integrales dobles de funciones de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre rectángulos y sobre conjuntos cerrados y acotados más generales que rectángulos. Estudiar los Teoremas de Fubini.

11.1 Definición y Teoremas

Definición intuitiva.
Sea $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in R$. La superficie dada por graf $f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), \ \forall (x,y) \in R\}$, el rectángulo R y los planos de ecuaciones $x = a, \ x = b, \ y = c, \ y = d$ respectivamente forman la frontera de una región S de $\mathbb{R}^3$. Se define entonces, el volumen del conjunto ordenado de f sobre R por:

$$V(S) = \int\int_R f(x,y)$$

y se lee integral doble de f sobre R. Otras notaciones:

$$V(S) = \int\int_R f(x,y)\ dA, \ V(S) = \int\int_R f(x,y)\ \ dx\, dy \text{ ó } V(S) = \int\int_R f(x,y)\ \ dy\, dx$$

Definición de la integral doble como límite de sumas:

Sea $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe $\displaystyle\int\int_R f$, ($f$ no necesariamente mayor o igual a cero), entonces se tiene:

$$\int\int_R f = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P_{ij}\| \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)(\Delta x)_i (\Delta y)_j$$

.

P_{ij} es una partición del rectángulo R.

$$P_{ij} = \{(x_i, y_j) \in R \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\}$$

con $(\Delta x)_i = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$ y $(\Delta y)_j = y_{j+1} - y_j = \dfrac{d-c}{n}$.

$\|P_{ij}\|$ = norma de la partición = max{ diagonales de los subrectángulos de P_i}. Obsérvese que si $f(x,y) = 1 \Rightarrow \int\int_R 1 =$ área de $R = A(R)$. Sin embargo, cuando R no es un rectángulo, sino una región D cerrada y acotada en $\mathbb{R}^2$, $\int\int_D f$ sigue siendo el volumen del sólido cuya tapa superior es una porción de la superficie $z = f(x,y)$, su tapa inferior es D y lateralmente está acotado por las rectas proyectantes de los puntos de la porción de superficie sobre el plano xy. Si $f(x,y)$ toma valores negativos podemos tener también si se requiere, el volumen con signo. (ver la figura 11.1)

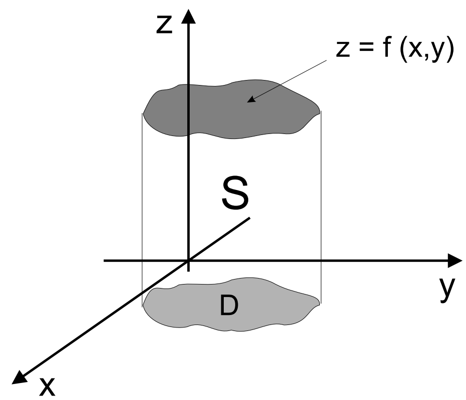

Figura 11.1:

(Recordar que para integrales simples, si existe $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \ dx$ y $f(x) \geq 0$, entonces $A(f)_a^b = \displaystyle\int_a^b f(x)\ \ dx$, pero por ejemplo para calcular el área encerrada por la función sen, tal que $\operatorname{sen} x = y$ entre 0 y 2π se tiene el dibujo **referencia al dibujo - Anexo 2-102-II -** donde el área bajo el eje x se calcula con $-\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} x\ \ dx$) (ver la figura 11.2)

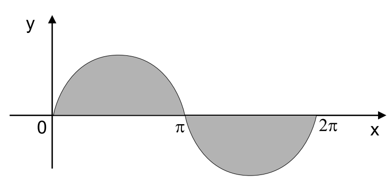

Figura 11.2:

Teorema 1.
Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo, entonces toda función $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínua es integrable sobre R.

Teorema 2.
Si f es una función acotada sobre R y el conjunto de puntos donde f es discontínua es una unión finita de gráficas de funciones contínuas. Entonces, f es integrable sobre R.

Primer Teorema de Fubini.

Si f es contínua sobre un rectángulo R, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\,dy = \int\int_R f(x,y)\ dA$$

Segundo Teorema de Fubini.
Si f es una función acotada sobre un rectángulo R y el conjunto de discontinuidades de f es una unión finita de gráficas de funciones contínuas. Si existe $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ para cada $x \in [a,b]$ entonces existe

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx = \int\int_R f(x,y)\ dA \ \text{ y también } \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right]\ dy = \int\int_R f(x,y)\ dA$$

Teorema 5.
Si D es una región tipo I, es decir, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$, con φ_1 y φ_2 funciones contínuas de $[a,b] \to \mathbb{R}$, entonces,

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy\,dx,$$

y si D es una región tipo II, es decir $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)],\ y \in [c,d]\}$ con ψ_1 y ψ_2 funciones contínuas $[c,d] \to \mathbb{R}$, entonces,

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx\,dy.$$

Ahora bien, si D es una región tipo III, o sea que D es de tipo I ó II ó unión de regiones de esos dos tipos, entonces

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\ dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\ dx\,dy$$

en este último caso si se quiere calcular la integral doble mediante una de las iteraciones, pero si ésta no es conveniente, entonces se evalúa la otra iteración, lo cual se llama inversión del orden de integración. En todo caso las regiones $D_{\mathrm{I}},\ D_{\mathrm{II}}$ ó D_{III} se llaman regiones elementales.

Teorema 6: Valor medio.
Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua y D una región elemental, entonces, para algún $(x_0, y_0) \in D$, se cumple que

$$\int\int_D f(x,y)\ dA = f(x_0,y_0)A(D),\ A(D) = \text{área de } D.$$

En la demostración se encuentra que

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \int\int_D f(x,y)\ dA \leq M$$

con $m = \text{mín}\ f(x,y),\ M = \text{máx}\ f(x,y)$.

11.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular las integrales iteradas indicadas a continuación:

(a) $\displaystyle\int_1^3\int_0^\pi (5x^2y-6\,\text{sen}\,y)\,dy\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1}-\frac{4x^3}{y^2+1}\right)\,dx\,dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (y^3x^4\,\text{sen}(x^5))\,dx\,dy$

Solución

(a) $\displaystyle\int_1^3\int_0^\pi (5x^2y-6\,\text{sen}\,y)\;dy\,dx=\int_1^3\left[\frac{5}{2}x^2y^2+6\cos y\right]_{y_1=0}^{y_2=\pi}\;dx=\int_1^3\left(\frac{5\pi^2}{2}x^2-6-6\right)\;dx=$

$\displaystyle\left[\frac{5\pi^6}{2}x^3-12x\right]_1^3=\frac{65\pi^2}{3}-24$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1}-\frac{4x^3}{y^2+1}\right)\;dx\,dy=\int_0^1\left[8y\ln(x+1)-\frac{x^4}{y^2+1}\right]_{x_1=0}^{x_2=2}\;dy=$

$\displaystyle\int_0^1\left(8y\ln 3-\frac{16}{y^2+1}\right)\;dy=\left[\frac{y^2}{4}\ln 3-16\arctan y\right]_0^1=\frac{1}{4}\ln 3-16\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\ln 3-4\pi$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (y^3x^4\,\text{sen}(x^5))\;dx\,dy=\int_0^1\left[-\frac{y^3}{5}\cos(x^5)\right]_{x_1=0}^{x_2=1}\;dy=-\int_0^1\left(\frac{y^3}{5}\cos(1)-\frac{y^3}{5}\right)\;dy=$

$\displaystyle-\frac{1}{5}\left[\frac{y^4}{4}\cos 1-\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{20}(1-\cos 1)$

Problema 2
Demostrar que existe $\displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(xy)^3\,\text{sen}(x^4)$ y luego calcularla.

Solución

$\displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]}(xy)^3\,\text{sen}(x^4)$ existe evidentemente, puesto que
$f_1(x,y)=(xy)^3$ es una función polinómica de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$f_2(x,y)=\text{sen}(x^4)$es función trigonométrica de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
y por lo tanto son contínuas en $\mathbb{R}^2$ y también lo es su producto $f_1.f_2$. (Recurrir al Teorema 1).
Ahora bien, considerando $R=[0,1]\times[0,1]$ de tipo II,

$$\int\int_R(xy)^3\,\text{sen}(x^4)=\int_0^1\int_0^1(xy)^3\,\text{sen}(x^4)\,dx\,dy=\int_0^1\left[-\frac{y^3}{4}\cos(x^4)\right]_{x_1=0}^{x_2=1}dy=\frac{1}{16}(1-\cos 1)$$

Problema 3

Sean $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2],\ y \in [0, x^2/2]\}$
(a) ¿Existe $\int\int_D f$?
(b) Si (a) es afirmativo evaluar

$$\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}}\ dy\, dx$$

Nota: admitir que $\int \sqrt{a^2+t^2} = \frac{a}{2}\ln|t+\sqrt{a^2+t^2}| + \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}$

Solución

$f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2],\ y \in [0, x^2/2]\}$ f es contínua $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y D es de tipo I. $\therefore$ Teorema 1 $\Rightarrow$ $\int\int_D f$ existe.

Ahora para calcular $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^2 \frac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}}\ dy\, dx$ (ver la figura 11.3)

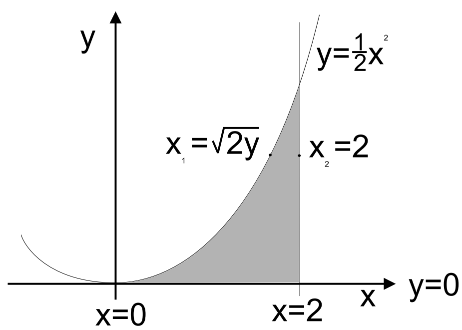

Figura 11.3:

notemos que la primera integral a evaluar (respecto a y) no es inmediata, por lo cual, al observar que D es también tipo II, podemos invertir el orden de integración. La coordenadas de A se obtienen de $x = 2$ en $y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2,2)$

$$\therefore \int\int_R \frac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}} = \int_0^2 \int_{\sqrt{2y}}^2 \frac{x}{\sqrt{2+x^2+y^2}}\ dx\, dy =$$

$$\int_0^2 \left[\sqrt{2+x^2+y^2}\right]_{x_1=\sqrt{2y}}^{x_2=2} dy = \int_0^2 \left(\sqrt{6+y^2} - \sqrt{2+2y+y^2}\right)\ dy$$

Ahora $\int_0^2 \sqrt{6+y^2}\ dy =$ (por la fórmula dada en el enunciado)

$$= \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\ln\left|y+\sqrt{6+y^2}\right| + \frac{y}{2}\sqrt{6+y^2}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(\ln|2+\sqrt{10}| + \sqrt{10}) - \frac{\sqrt{6}}{2}\ln\sqrt{6} = I_1$$

mientras que

$$\sqrt{2+2y+y^2} = \sqrt{1+(1+y)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+(1+y)^2}\, dy = \left[\frac{1}{2}\ln\left|(1+y)+\sqrt{(1+y)^2+1}\right| + \frac{1+y}{2}\sqrt{(1+y)^2+1}\right]_0^2 =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}(3\sqrt{10}-\sqrt{2}) = I_2 \quad \therefore \int\int_D f = I_1 - I_2.$$

Problema 4
Demuestre que en el problema anterior, al invertir el orden de integración, se obtiene:

$$\int\int_R f = \int_0^2 \sqrt{6+y^2}\, dy - \int_0^2 \sqrt{2+2y+y^2}\, dy$$

Solución
Este ejercicio queda como práctica para el estudiante.

Problema 5
Sea $f : d \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con f contínua. Invertir el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\ dx\, dy$$

y dibujar la región de integración D.

Solución

$$\begin{cases} y_1 = 0, & y_2 = 1 \\ x_1 = 0, & x_2 = \sqrt{y} \Rightarrow y_2 = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3 = 1, & y_4 = 2 \\ x_3 = 0, & x_4 = \sqrt{2-y} \Rightarrow y = 2 - x^2 \end{cases}$$

(ver la figura 11.4)

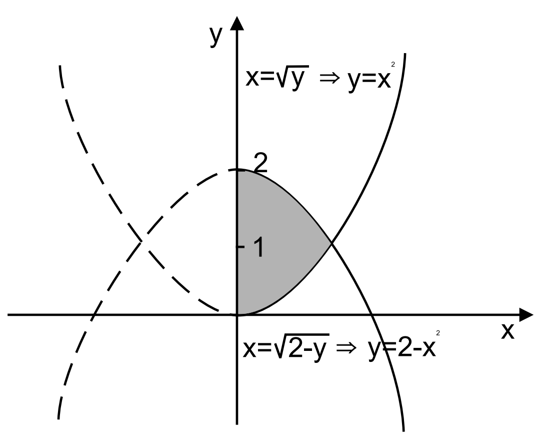

Figura 11.4:

Resultado: $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\ dy\, dx$

Problema 6

Calcular, mediante integrales dobles, el volumen del sólido acotado por el paraboloide elíptico de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=y$ y por el plano de ecuación $y=c$.

(*Nota:* $\displaystyle\int(-x^2+a^2c)^{\frac{3}{2}}\ dx=\frac{x}{8}(-2x^2+5a^2c)\sqrt{-x^2+a^2c}+\frac{3a^4c^2}{8}\operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{1}{a^2c}}\right)$)

Solución

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=y,\quad y=c$ Como el sólido es simétrico respecto de los planos xy y el yz, podemos calcular $\frac{1}{4}$ del volumen (ver la figura 11.5)

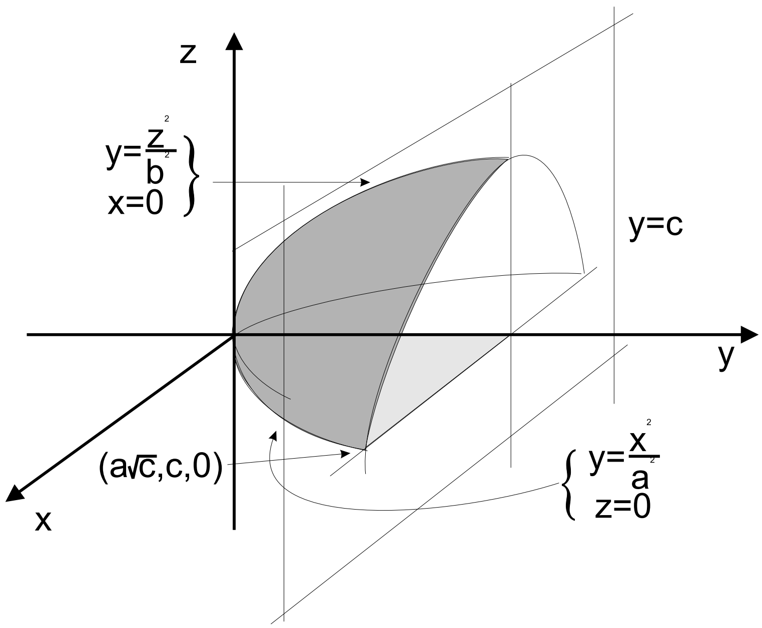

Figura 11.5:

$$\therefore\ \frac{1}{4}V=\int\int_D f(x,y)=\int_0^{a\sqrt{c}}\int_{\frac{x^2}{a^2}}^{c}\frac{b}{a}(a^2y-x^2)^{\frac{1}{2}}\ dy\,dx=$$

$$\frac{2b}{3a^3}\int_0^{a\sqrt{c}}[(a^2y-x^2)^{\frac{3}{2}}]_{y_1=\frac{x^2}{a^2}}^{y_2=c}\ dx=\frac{2b}{3a^3}\int_0^{a\sqrt{c}}(a^2c-x^2)^{\frac{3}{2}}\ dx=$$

por fórmula dada

$$=\frac{2b}{3a^3}\frac{3\pi a^4c^2}{16}\quad\therefore\ V=\frac{1}{2}\pi abc^2\ \ \text{unidades de volumen}$$

Problema 7

Suponiendo que existe $\int\int_D f$:

(a) Dibujar la región D
(b) Invertir el orden de integración en

$$\int\int_D f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} f(x,y)\ \ dy\, dx$$

Solución
(ver la figura 11.6)

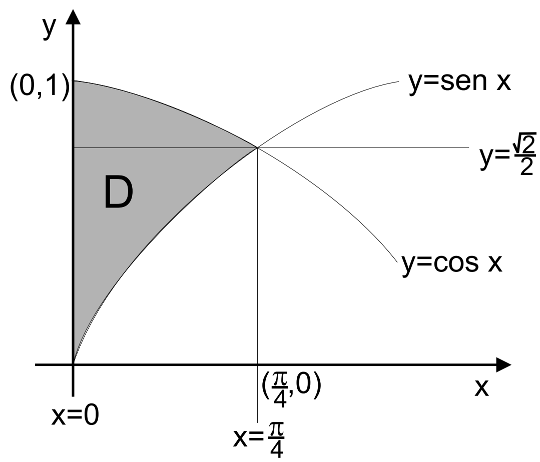

Figura 11.6:

$$\int\int_D f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} f(x,y)\ \ dy\, dx =$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{\operatorname{arcsen} y} f(x,y)\ \ dx\, dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \int_0^{\arccos y} f(x,y)\ \ dx\, dy$$

Problema 8
Sea D la región del problema anterior, si la densidad δ en cada punto (x,y) de D es $\delta(x,y) = y$, calcular la masa y la coordenada Y_M del centro de masa de una lámina plana representada por D. (Nota: $M(D) = \int\int \delta(x,y)$ y (X_M, Y_M) viene dado por $X_M = \int\int_D x\delta(x,y),\ \ Y_M = \int\int_D y\delta(x,y)$)

Solución

$$M(D) = \int\int_D \delta(x,y) = \int\int_D y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\ \ dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\ \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)\ \ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ \ dx = \frac{1}{4}(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ y_M = \frac{1}{M}\int\int_D y\delta(x,y) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x)\ \ dx$$

Ahora, $\cos^3 x = (\cos x)(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cos x - (\cos x)\operatorname{sen}^2 x$
y $\quad \operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)(1 - \cos^2 x) = \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x)\cos^2 x$

$$\therefore\ Y_M = \frac{4}{3}\left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{10\sqrt{2}-8}{9}$$

(Nota: Aquí fue obvio que no había necesidad de cambiar el orden de integración.)

Problema 9

Suponiendo que existe $\displaystyle\int\!\!\int_D f = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\int_{3y^2}^{|y|} f(x,y)\ dx\,dy$

(a) Dibujar la región de integración D.

(b) Invertir el orden de integración.

Solución

y varía entre $y = -\frac{1}{3}$ y $y = \frac{1}{3}$, x varía entre $x = 3y^2$ (parábola) y $x = |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$ (ver la figura 11.7)

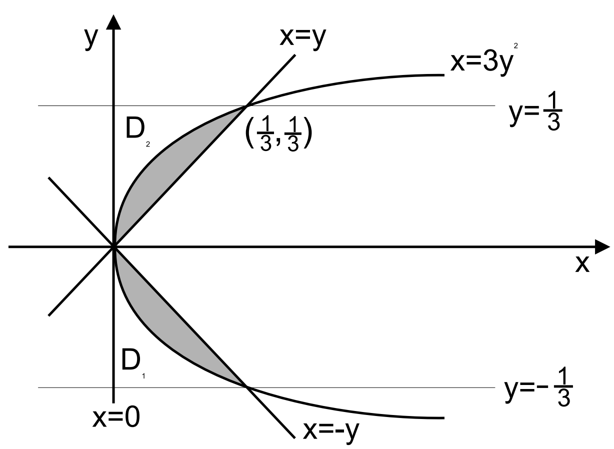

Figura 11.7:

La región $D = D_1 \cup D_2$

$$\therefore \int\!\!\int_D = \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\sqrt{\frac{x}{3}}}^{-x} f(x,y)\ dy\,dx + \int_0^{\frac{1}{3}}\int_x^{\sqrt{\frac{x}{3}}} f(x,y)\ dy\,dx$$

Problema 10

El área de una región plana D viene dada por $A(D) = \int\!\int_D 1$. Demuestre que el área de la región $D \subset \mathbb{R}^2$, acotada por $xy \leq 4$, $y \leq x$, $27y \geq 4x^2$ viene dada por

$$\int_0^2\int_{\frac{4x^2}{27}}^{x} dy\,dx + \int_2^3\int_{\frac{4x^2}{27}}^{\frac{4}{x}} dy\,dx$$

Solución

$$A(D) = \int\int_D 1, \ D = \begin{cases} xy \leq 4 \\ y \leq x \\ 27y \geq 4x^2 \end{cases}$$

donde $xy = 4$ representa a una hipérbola y $27y = 4x^2$ a una parábola.
D no es tipo I ni tipo II, pero puede descomponerse, por ejemplo en unión disjunta de regiones de tipo I (ver la figura 11.8)

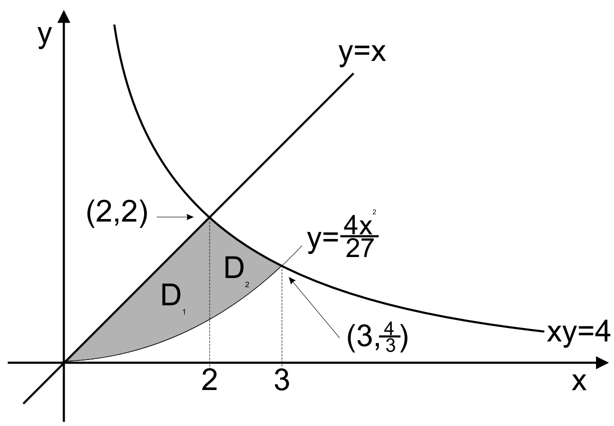

Figura 11.8:

$$A(D) = \int\int_D 1 = \int\int_{D_1} 1 + \int\int_{D_2} 1 = \int_0^2 \int_{\frac{4x^2}{27}}^{x} \ dy\, dx + \int_2^3 \int_{\frac{4x^2}{27}}^{\frac{4}{x}} \ dy\, dx$$

Problema 11
Determinar el dominio D de integración e invertir el orden en:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_{x-1}^1 f(x,y)\, dy\, dx$$

Solución
(ver la figura 11.9 en la página 115)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y) \ dy\, dx + \int_1^2 \int_{x-1}^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y) \ dx\, dy$$

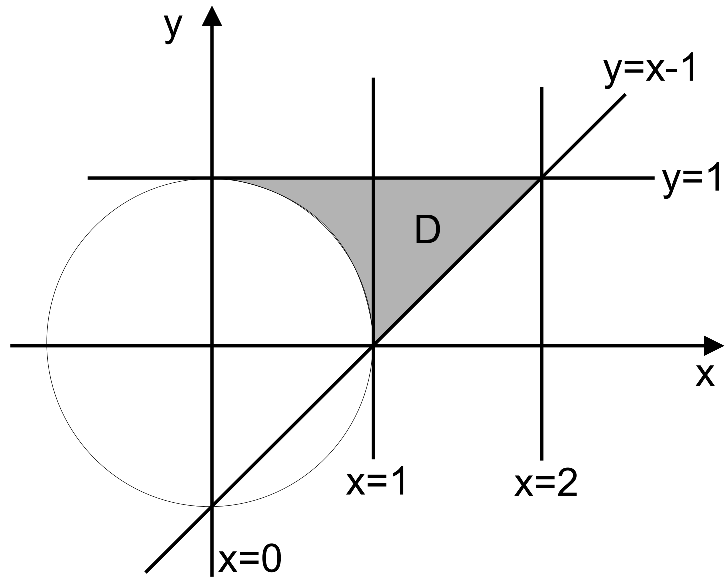

Figura 11.9:

Problema 12
Sea $D = \{(x,y) \;;:\; x^2+y^2 \leq 1\}$. Explique por qué es cierto que

$$\frac{\pi}{2} \leq \int\int_D \frac{dx\,dy}{1+x^4+y^4} \leq \pi$$

Solución
$D = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \frac{1}{1+x^4+y^4}$, alcanzará su máximo valor cuando $1+x^4+y^4$ sea mínimo y alcanzará su valor mínimo cuando el denominador sea máximo. $\therefore\; M = 1$ y $m = \frac{1}{2}$. Además, f es contínua $\Rightarrow$ alcanzará sus valores máximos y mínimos en D que es región elemental, luego por el teorema del valor medio para integrales dobles: $m \leq \dfrac{1}{A(D)} \displaystyle\int\int_D f \leq M$ y con $A(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi$ queda

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\pi}\int\int_D f(x,y) \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \int\int f(x,y) \leq \pi$$

Problema 13
Suponer que existe $\displaystyle\int\int_D f = \int_1^3 \int_{1-x}^{\lg x} f(x,y)\,dy\,dx$
(a) Dibujar la región D.
(b) Invertir el orden de integración.

Solución
(ver la figura 11.10 en la página 116)

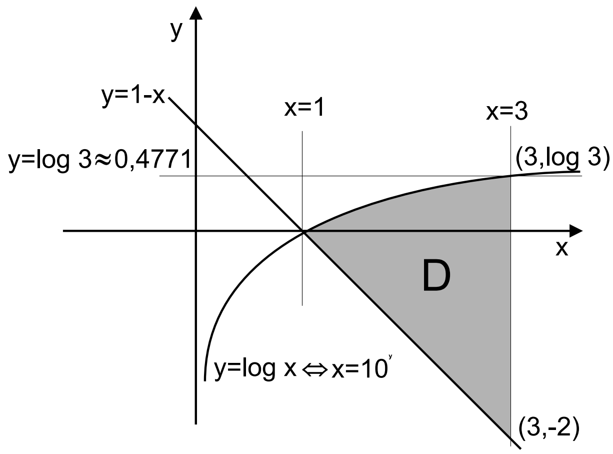

Figura 11.10:

$$\int\int_D f = \int_1^3 \int_{1-x}^{\lg x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{0}\int_{1-y}^{3} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{\lg 3}\int_{10^y}^{3} f(x,y)\,dx\,dy$$

Problema 14

Se denota la función "parte entera de" por [ ] y se define como [ ] : $\mathbb{R} \to Z; Z = \{\text{enteros}\}\ x \to [\![x]\!]$ se lee "parte entera de x" y se define como el mayor entero menor o igual que x.

Ejemplos: $[\![\frac{5}{4}]\!] = 1;\ [\![2.5]\!] = 2;\ [\![\sqrt{2}]\!] = 1;\ [\![0.3]\!] = 0;\ [\![-0.5]\!] = -1;\ [\![-2.8]\!] = -3;\ [\![1.9999]\!] = 1$

Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int\int_D [\![x]\!],\quad D = [0,3]\times[0,3] =$ producto cartesiano del intervalo cerrado $[0,3]$ por si mismo.

(b) $\displaystyle\int\int_D [\![1+y]\!]\ D = [0,3]\times[0,3]$

(c) $\displaystyle\int\int_D [\![x+y]\!]\ D = [0,2]\times[0,2]$

(d) $\displaystyle\int\int_D [\![1+x]\!]^{[\![y]\!]}\ D = [0,2]\times[0,4]$

(e) $\displaystyle\int\int_D [\![y]\!]^{[\![1+x]\!]}\ D = [0,2]\times[0,4]$

Solución

(a) $\displaystyle\int\int_D [\![x]\!],$ Hemos reticulado el cuadrado y lo hemos numerado $R_i,\ i = 1,\ldots,9$ y colocamos en cada R_i el valor de parte entera de x (ver la figura 11.11 en la página 117)

$$\therefore \int\int_D [\![x]\!] = 0\Big(\int\int_{R_1} 1 + \int\int_{R_4} 1 + \int\int_{R_7} 1\Big) + 1\Big(\int\int_{R_2} 1 + \int\int_{R_5} 1 + \int\int_{R_8} 1\Big) +$$

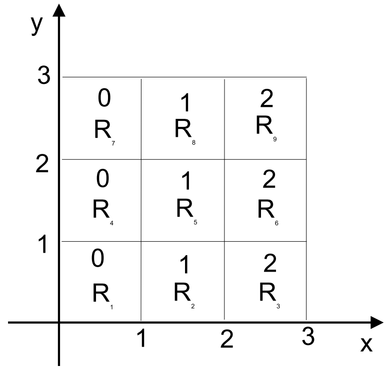

Figura 11.11:

$+2(\int\int_{R_3} 1 + \int\int_{R_6} 1 + \int\int_{R_9} 1) = 0 + 3 + 6 = 9$

(b) $\int\int_D [1 + y] = 1(1 + 1 + 1) + 2(1 + 1 + 1) + 3(1 + 1 + 1) = 3 + 6 + 9 = 18$ (ver la figura 11.12)

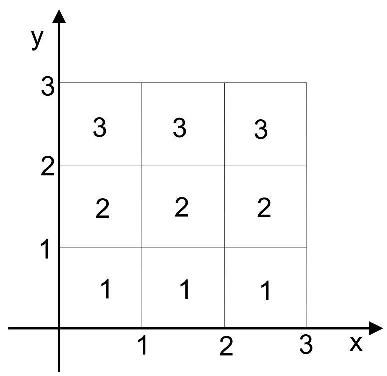

Figura 11.12:

(c) $\int\int_D [x + y] = 0(\frac{1}{2}) + 1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} + \frac{3}{2} = 6$ (ver la figura 11.13 en la página 118)

(d) $\int\int_D [1 + x]^{[y]} = 1(1^3 + 2^3 + 1^2 + 2^2 + 1^1 + 2^1 + 1^0 + 2^0) = 19$

(e) $\int\int_D [y]^{[1+x]} = 0(1 + 1) + 1(1 + 1) + 2(1) + 4(1) + 3(1) + 9(1) = 20$ (ver la figura 11.14 en la página 118)

Nota: En este ejercicio, dividimos cada cuadrado en tres filas. En la primera fila (de arriba hacia abajo) va $[y]$, en la segunda va $[1 + x]$ y en la tercera $[y]^{[1+x]}$.

Problema 15

En las integrales a continuación, suponen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(D)$ o f con un número finito de discontinuidades en D. Determinar los respectivos dominios de integración e invertir el orden de la misma.

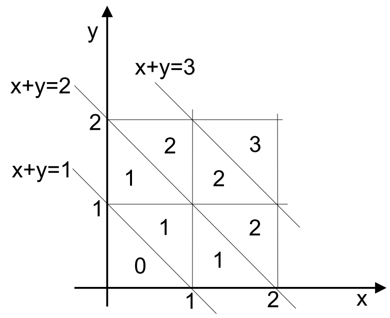

Figura 11.13:

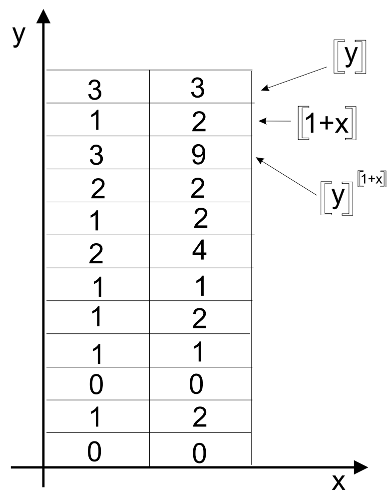

Figura 11.14:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{3\sqrt{x}} f(x,y)\ dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2+y} f(x,y)\ dx\, dy$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} f(x,y)\ dy\, dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} f(x,y)\ dy\, dx$

con f contínua excepto en $x=0$

Solución

(ver la figura 11.15 en la página 119)

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{3\sqrt{x}} f(x,y)\ dy\, dx = \int_0^{3\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{9}y^2}^{2} f(x,y)\, dx\, dy$

$$x \in [0,2],\ y \in [0,3\sqrt{x}],\ \begin{cases} y = 3\sqrt{x} \geq 0 & \Rightarrow y^2 = 9x \\ x = 2 & \Rightarrow y = 3\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

(b) (ver la figura 11.16 en la página 119)

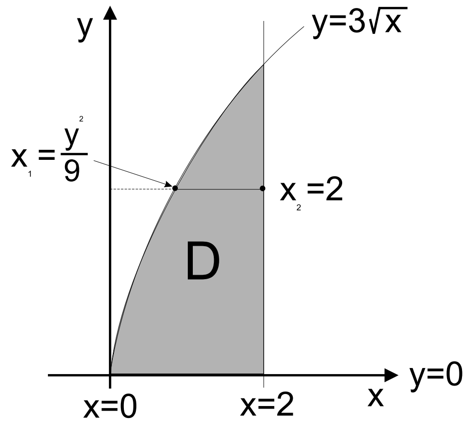

Figura 11.15:

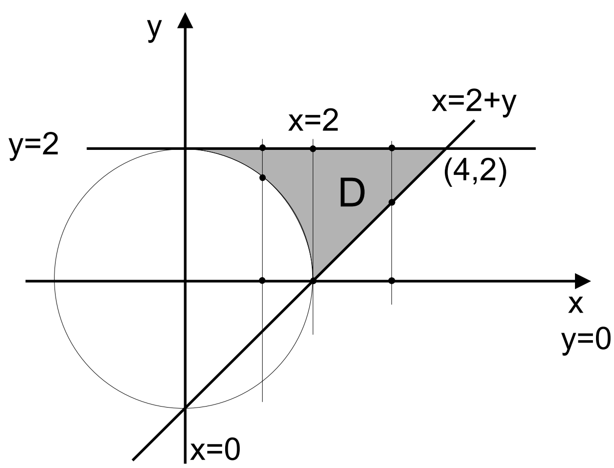

Figura 11.16:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{4-y^2}}^{2+y} f(x,y)\ dx\,dy = \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2} f(x,y)\ dy\,dx + \int_2^4 \int_{x-2}^{2} f(x,y)\ dy\,dx$$

$$x \in [0,2],\ y \in [\sqrt{4-x^2}, 2] \quad ; x \in [2,4],\ y \in [x-2, 2]$$

(c) Aquí se tiene que

$$\int_{-1}^0 \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} f(x,y)\ dy\,dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\,dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{\frac{2-y}{y}}}^{\sqrt{\frac{2-y}{y}}} f(x,y)\ dx\,dy$$

(ver la figura 11.17 en la página 120)

Problema 16

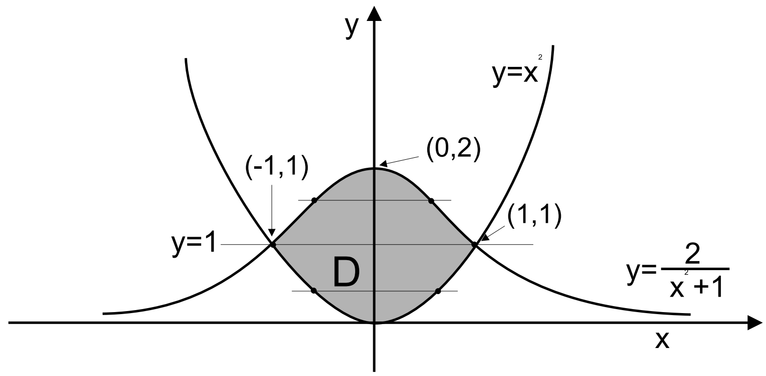

Figura 11.17:

Suponiendo que existe $\displaystyle\int\int_{[0,2]\times[0,2]} dx\, dy$ con

$$f(x,y)=\begin{cases}1+x+y & \text{si } x+y\le 2\\ \\ 0 & \text{si en el caso contrario}\end{cases}$$

(a) Calcular la integral dada.
(b) Invertir el orden de integración y comprobar el resultado de (a).

Solución

$$D=[0,2]\times[0,2],\;\; f(x,y)=\begin{cases}1+x+y & \text{si } x+y\; leq 2\\ \\ 0 & \text{si en el caso contrario}\end{cases}$$

$$\text{(a)}\;\; \int\int_D f(x,y)\;\, dx\, dy = \int_0^2\int_0^{2-y}(1+x+y)\;\, dx\, dy + \int_0^2\int_{2-y}^{0} 0\;\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2-y}(1+x+y)\;\, dx\, dy = \int_0^2 (x+\frac{x^2}{2}+yx)_{x_1=0}^{x_2=2-y}\;\, dy =$$

$$= \int_0^2\left[(2-y)+\frac{1}{2}(2-y)^2+y(2-y)\right]\;\, dy = \frac{14}{3}$$

(ver la figura 11.18 en la página 121)

$$\text{(b)}\;\; \int\int_D f(x,y)\;\, dy\, dxy = \int_0^2\int_0^{2-x}(1+x+y)\;\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^2 \left(y+\frac{1}{2}y^2+yx\right)_{y_1=0}^{y_2=2-x}\;\, dx = \frac{14}{3}$$

Problema 17

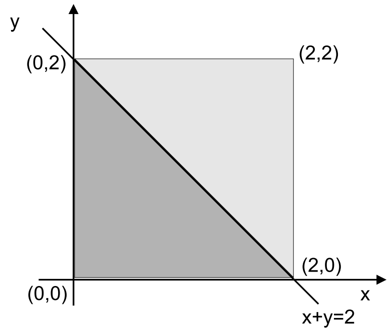

Figura 11.18:

$$\text{Sea} f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad \text{en } \; R = [0,1] \times [0,1]$$

Demuestre que f es integrable y calcule $\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy$

Solución

Sea $n > 0$, considere la partición regular de $[0,1]$ en $n-$subintervalos, o sea la partición regular del rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$ en n^2-subrectángulos. La suma de Riemann de f con respecto a tal partición es $S_{ij} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)(\Delta x_i)(\Delta y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\frac{1}{n^2}$ Ahora, $f(x,y) = 1$ en la diagonal de R y es 0 fuera de allí, luego se necesitan n rectángulos para cubrir la partición. $\therefore\ S_{ij} = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ y como existe el $\lim\limits_{n\to 0} S_{ij} = 0\ \therefore\ f$ es integrable sobre R y se tiene que $\displaystyle\int\int_R f(x,y) = 0.$

Capítulo 12

Teorema de Green

Objetivos

Estudiar el Teorema de Green y sus aplicaciones.

12.1 Enunciado y Conceptos Afines

Sea D una región tipo III y designemos su frontera por ∂D. Supongamos un campo vectorial
$F : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longrightarrow F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$
con P y Q de clase $\mathcal{C}^1(A)$. Entonces se tiene la importante conclusión:

$$\oint_\sigma F \cdot d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+ = \partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Con $\mathcal{C}^+ = \partial D = \; frontera\,de\,D \; =$ Curva simple y cerrada recorrida en el sentido positivo "(+)".

Definición. Que $\mathcal{C}^+ = \partial D$ tenga orientación positiva se entenderá de la siguiente manera:
Si alguien camina a lo largo de $\mathcal{C}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, entonces la región D siempre quedará a su izquierda.

Teorema. Si $\mathcal{C}$ es una curva simple y cerrada que acota a D para la cual se aplique el Teorema de Green, el área de D, $A(D)$ es

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

12.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Calcular $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} (\operatorname{sen} x)(\cos y)\,dx + [xy + (\operatorname{sen} y)(\cos x)]\,dy$

siendo $\mathcal{C}^+ = \partial D$, con D la región entre las curvas de ecuaciones $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.

Solución

$P(x, y) = (\operatorname{sen} x)(\cos y)$

$Q(x, y) = xy + (\operatorname{sen} y)(\cos x)$
Por tanto, P y Q son $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ por ser combinaciones de funciones elementales (Polinómicas o Trigonométricas), $\mathcal{C} = \partial D$ es cerrada, simple y con sentido "(+)" (ver la figura 12.1)

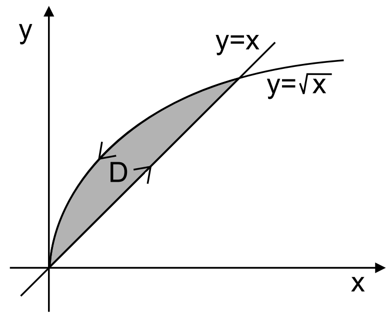

Figura 12.1:

Por tanto, el Teorema de Green dice

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D [y - (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y) + (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)] = \iint_D y = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} y \ dy\, dx$$

(hemos considerado D región de Tipo I). Por tanto

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}(y^2)_x^{\sqrt{x}} \ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^2) \ dx = \frac{1}{12}$$

(Evidentemente, fue más fácil calcular la integral doble que la integral de línea dada)
El alumno puede considerar tambien D Tipo II y llegar a

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} y \ dx\, dy = \frac{1}{12}$$

Problema 2

Calcular $I = \oint_{\mathcal{C}^+ = \partial\mathcal{D}} e^y\, dx + (xe^y + 2y)\, dy$ con $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución
Lo más sensato es utilizar el Teorema de Green, en vez de calcular la integral de línea directamente. Una vez que el alumno verifique las condiciones del Teorema mencionado, se procede a calcular

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D (e^y - e^y) = 0$$

Problema 3

Calcular $\oint_{\mathcal{C}^+} (2xe^y + y)\,dx + (x^2e^y + x - 2y)\,dy$ $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$ "(+)"

Solución

La curva es una Elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a = 2\,,\ b = 3$
Verificar las condiciones del Teorema de Green y aplicando

$$\iint_D (2xe^y + 1 - 2xe^y - 1) = \iint_D 0 = 0$$

Problema 4

Calcular el área encerrada por la Elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ utilizando integrales de línea

Solución

$\mathcal{C} : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, recorramos en sentido "(+)" y sea D la región cuyo borde es $\mathcal{C}$.
Apliquemos el Teorema de Green a la integral

$$\oint_{\mathcal{C}^+} -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \left(-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\right] = \iint_D (1+1) = 2\iint_D 1 =$$

$$2A(D) \Rightarrow A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}^+} -y\,dx + x\,dy$$

Sea $\sigma(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t),\ \ \sigma'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 3\cos t),\ \ t \in [0, 2\pi]$
$F(x,y) = (-y, x),\ \ F(\sigma(t)) = (-3\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t)$
$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 6\,\mathrm{sen}^2\,t + 6\cos^2 t = 6$
Luego

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6dt = 6\pi \quad \textit{unidades de área}$$

Problema 5

Sean M y N funciones de $A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$ y D región de tipo III con ∂D su frontera.
Demuestre que

$$\oint_{\partial D} MN(\,dx + \,dy) = \iint_D \left[N\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\right]$$

Solución

Por las hipótesis dadas, podemos aplicar el Teorema de Green con $P = MN$ y $Q = MN$ funciones de $A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(A)$ por serlo M y N, y da como resultado

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D \left(\frac{\partial (MN)}{\partial x} - \frac{\partial (MN)}{\partial y}\right) =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x}N + M\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}N - M\frac{\partial N}{\partial y}\right) =$$

$$\iint_D \left[N\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\right]$$

Capítulo 13

Cambio de variables en la integral doble

Objetivos

El alumno debe aprender a decidir, cuándo es necesario un cambio de variables, para evitar el cálculo de una integral doble muy complicada en coordenadas cartesianas.
En particular, estudiar las coordenadas polares y elípticas.

13.1 Procedimientos

Recordemos que para el caso de una integral simple, $\int_a^b f(x)\ dx$ la cual no podíamos resolver en forma simple, se hacía un cambio de variables $x = g(t)$, con g función de clase $\mathcal{C}^1$ y uno a uno en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f[g(t)]\ g'(t)dt$$

con $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$.
Análogamente para el caso de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f integrable sobre D, queremos expresar $\int\int_D f(x, y)\ dA$ como una integral sobre D^* según la transformación

$$\left\{ \begin{array}{l} T : D^* \longrightarrow D, \quad T \in \mathcal{C}^1(D^*) \\ (u, v) \longrightarrow T(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) \end{array} \right\}$$

con $x = g_1(u, v)$ y $y = g_2(u, v),\ (u, v) \in D^*$. Suponer además que T es uno a uno, entonces tenemos el Teorema siguiente:

$$\int\int_D f(x, y)\ dA = \int\int_{D^*} f[g_1(u, v), g_2(u, v)]\ Abs\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] dA,$$

en donde $Abs\left[\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]$ es el valor absoluto del determinante Jacobiano de x,y respecto de u y de v

$$|J| = Abs \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = Abs \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Antes de pasar a los ejercicios ilustremos el caso importante de las coordenadas polares (ver la figura 13.1 en la página 128)
Un *rectángulo* D^* en el plano rectangular $\rho\theta$ es enviado por T en el *sector circular* D del plano rectangular xy, las rectas $\rho = \rho_1,\quad \rho = \rho_2$ paralelas al eje θ son enviadas en circunferencias de

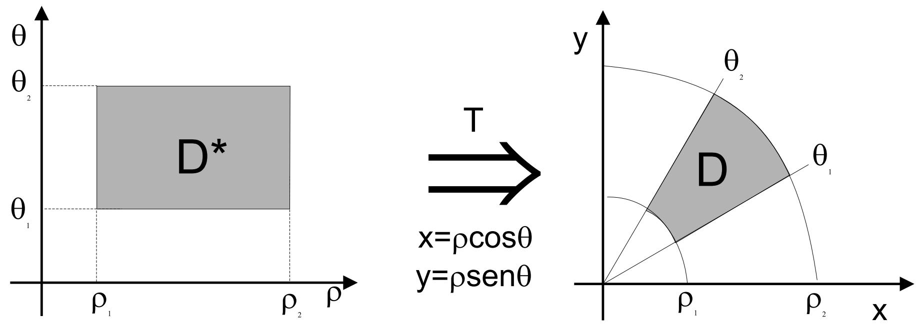

Figura 13.1:

radios ρ_1 y ρ_2 respectivamente en plano xy y las rectas $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, paralelas al eje ρ son enviadas en semirayos de ángulos θ_1 y θ_2 respectivamente.
También, se puede definir una región elemental D^* tipo II es enviada por T en D (ver la figura 13.2)

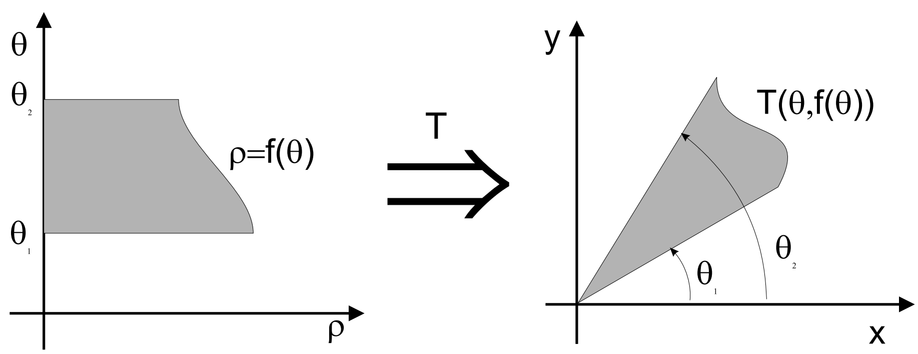

Figura 13.2:

Por último calculemos $|J|$ con $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$,
$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta = \rho$

13.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1

Calcular $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, $D =$disco centro$(0,0)$ y radio 2.

Solución

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dy\, dx$$

Hemos considerado D tipo I(aunque también es tipo II), o bien

$\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dx\, dy$, considerando ahora D tipo II, en ambos casos vemos que $\displaystyle\int \sqrt{x^2+y^2}\ dy$ o $\displaystyle\int \sqrt{x^2+y^2}\ dx$ no son inmediatas. Por tal motivo simplificaremos los cálculos pasando a Coordenadas polares:

$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ Abs\left[\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] = \rho \geq 0,\ \ \theta \in [0, 2\pi]$ y observamos que $T^{-1}(D) = D^*$ es un rectángulo de lados paralelos a los ejes ρ y θ respectivamente (ver la figura 13.3)

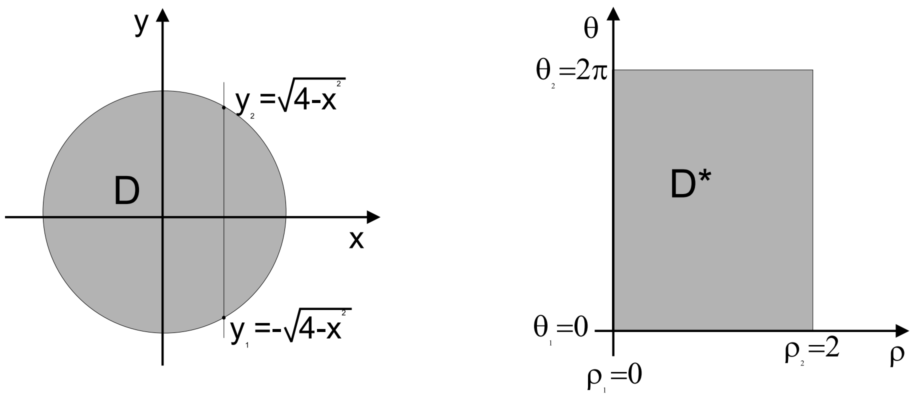

Figura 13.3:

Por tanto, $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dA = \int_0^2\int_0^{2\pi} \rho\cdot\rho\ d\theta d\rho = \int_0^2 \rho^2(\theta)_0^{2\pi}\ d\rho = 2\pi\int_0^2 \rho^2\ d\rho = \frac{2\pi}{3}(\rho^3)_0^2 = \frac{16\pi}{3}$

Aquí hemos considerado D^* tipo I, el alumno puede comprobar que D^* es también tipo II y que

$\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2\ d\rho d\theta = \frac{16\pi}{3}$

Problema 2

Observar que si se pide el volumen del sólido acotado superiormente por la superficie dada por $z^2 = x^2+y^2,\ z \geq 0$, e “inferiormente" por el disco $D = \{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2 \leq 4\}$ y conociendo que D es proyección de cierta porción de la superficie dada, sobre el plano xy, la solución del problema es la misma que la del ejercicio (1).

Solución

Observar que $z = \sqrt{x^2+y^2}$ es la ecuación de una superficie cónica ($z \geq 0 \Rightarrow$ parte por encima del plano xy). De modo que nuestro sólido es una especie de vaso con interior cónico (ver la figura 13.4 en la página 130)

$$V = \int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dA = \frac{16\pi}{3}\ \ unidades\ de\ volumen$$

por el ejercicio (1).

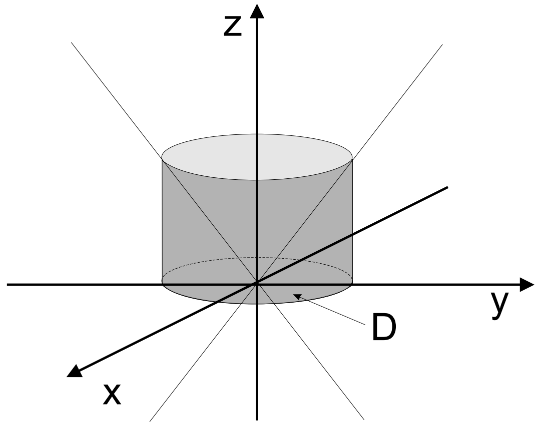

Figura 13.4:

Problema 3
Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por la superficie dada por $z^2 = x^2+y^2,\ z \geq 0$, e inferiormente por la región D dada por $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$, conociendo que D es la proyección de cierta porción de la superficie dada, sobre el plano xy.

Solución
$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D:\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0$
Completando cuadrados: $x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 4$
Por tanto $D = \{(x, y) \,|\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$, se trata de un disco de centro en $(2, 0)$ y radio 2. Como el centro del disco está en el eje x, nos vemos en la necesidad de mirar los ejes xy como en la figura (ver la figura 13.5)

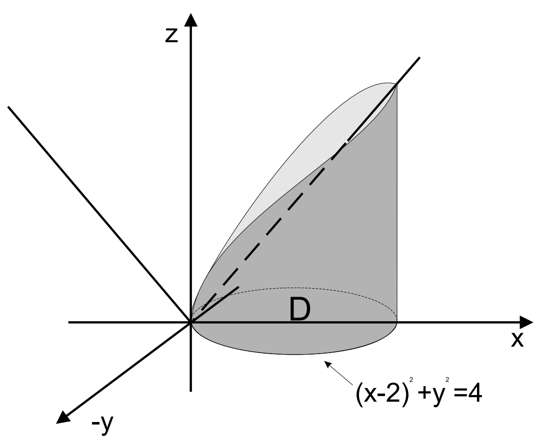

Figura 13.5:

(Por comodidad en la vizualización del sólido sólo hemos girado el eje x hacia el y de modo que ahora vemos la parte negativa del eje y hacia nosotros).
Además, por ser el sólido simétrico respecto del plano xz podemos escribir $\displaystyle\int\int_P \sqrt{x^2+y^2}\ dA$ con P la mitad de D, de ésta forma

$$V = 2\int\int_P \sqrt{x^2+y^2}\ dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-(x-2)^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dy\, dx$$

Una integral muy difícil en Coordenadas Cartesianas. Por lo tanto hacemos el cambio a Coordenadas Polares (nos lo sugiere la forma del integrando, como en los ejercicio (1) y (2)) (ver la figura 13.6)

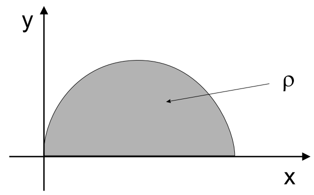

Figura 13.6:

$x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ Abs\left[\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] = \rho$

Pero aquí debemos conocer, cuál fue la región del plano rectangular $\rho\theta$ enviada por la transformación T en el xy (ver la figura 13.7)

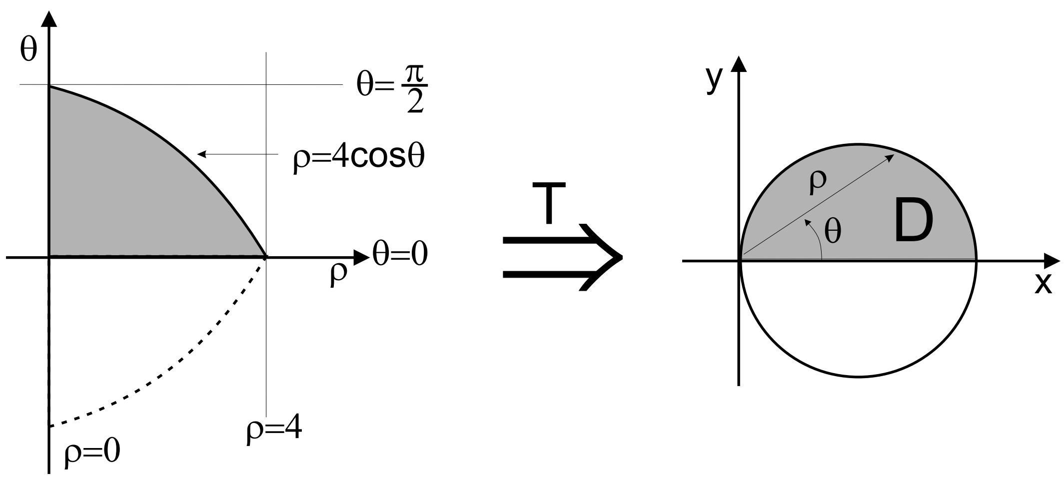

Figura 13.7:

Observar que si pensamos en el plano polar superpuesto al xy, θ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y ρ de 0 a los puntos de la circunferencia en coordenadas polares.

Así $x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 0 \Rightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho = 4\cos\theta$
(Con $\rho \neq 0$, para el caso $\rho = 0$ es el eje θ en el plano $\rho\theta$). Por tanto

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\rho\cdot\rho\ d\rho d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(\rho^3)_0^{4\cos\theta}\ d\theta = \frac{128}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\ d\theta =$$

$$\frac{128}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)(1 - \overset{2}{\mathrm{sen}}\,\theta)\ d\theta =$$

$$\frac{128}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)\ d\theta - \frac{128}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)(\overset{2}{\mathrm{sen}}\,\theta)\ d\theta = \frac{256}{9}\ \ unidades\ de\ volumen$$

Se deja al alumno, analizar el hecho de que también

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 \; d\rho d\theta = \frac{256}{9}$$

Problema 4
Hallar el área de la región exterior al círculo dado por $x^2 + y^2 < 4$ e interior a la curva de ecuación polar $\rho = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$.

Solución
Antes de explicar el ejercicio vamos a presentar algunas formas de Cardioides (la dada por $\rho = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$ es una cardioide) (ver la figura 13.8)

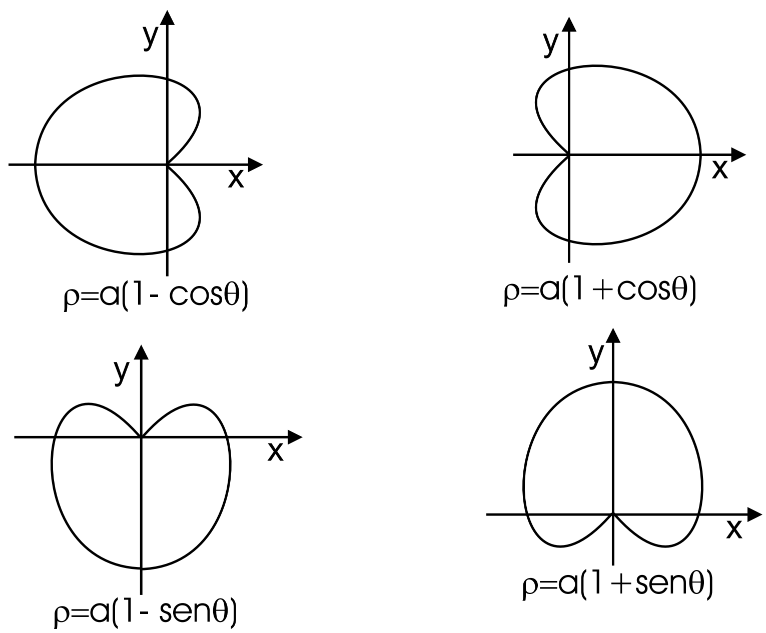

Figura 13.8:

En nuestro caso $a = 2, \quad \rho = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$
$A = \int\int_D 1$ pero como la curva tiene ecuación $\rho = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$ busquemos la contraimagen en el plano polar rectangular $\rho\theta$ (ver la figura 13.9 en la página 133)

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\operatorname{sen}\theta)} \rho \; d\rho d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{2} - 2\right] \; d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \; d\theta =$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen}\theta + \frac{1-\cos 2\theta)}{2} \; d\theta = (8+\pi) \quad unidades \; de \; área.$$

Problema 5
Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4z$,

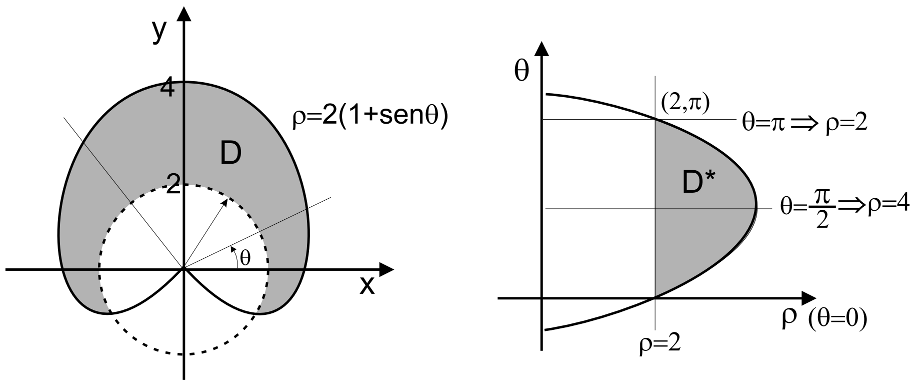

Figura 13.9:

inferiormente por el plano xy y lateralmente por la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Solución
$x^2 + y^2 = 4$ representa a una superficie cilíndrica cuya intersección con el plano xy $(z = 0)$ es la circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4, \;\; z = 0$. Finalmente, $x^2 + y^2 = 4z \Rightarrow z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que es la ecuación de una superficie parabólica (ver la figura 13.10)

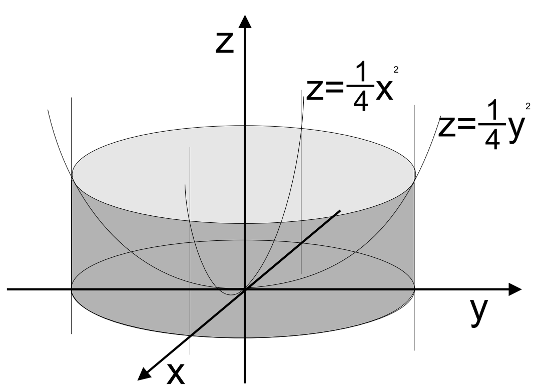

Figura 13.10:

$$z = 4(x^2 + y^2) \begin{cases} x = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}y^2 \\ y = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \; dx\, dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right)_0^{\sqrt{4-y^2}} \; dy =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{3}(\sqrt{4-y^2})^3 + y^2(\sqrt{4-y^2}) \right) \; dy$$

la cual no es inmediata en cartesianas. Pasamos a coordenadas polares.
Ya sabemos que D^* es un rectángulo (ver la figura 13.11 en la página 134)

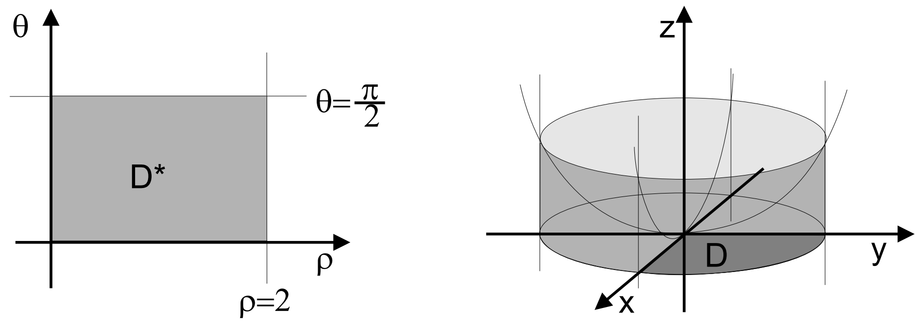

Figura 13.11:

Por lo tanto,

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{1}{4}\rho^2\cdot\rho\; d\rho d\theta = 2\pi \quad \textit{unidades de volumen.}$$

Problema 6
Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + y^2$; $y = z$ respectivamente.

Solución
$z = x^2 + y^2$ es la ecuación de una superficie parabólica (ver la figura 13.12)

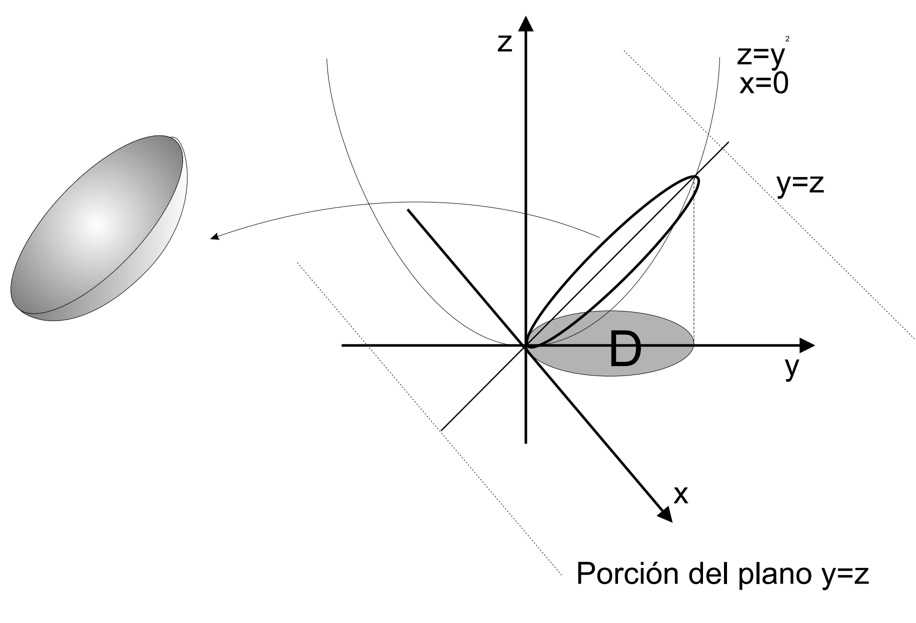

Figura 13.12:

Al proyectar el sólido sobre el plano xy (lo cual significa hacer $y = z$ en $z = x^2 + y^2$) se obtiene: $y = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 - y + x^2 = 0 \; x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ que es la ecuación del borde de D.
Ahora bien, V puede calcularse como $V_2 - V_1$ con:
$V_2 =$ Volumen del sólido que se obtiene al cortar la superficie cilíndrica $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ con los

planos $z=0$ y $z=y$.
$V_1 =$ Volumen del sólido que se obtiene de la superficie cilíndrica $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ con base en el plano $z=0$ y superiormente acotada por el paraboloide $z=x^2+y^2$. Por tanto,
$V=\int_0^1\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-(y-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-(y-\frac{1}{2})^2}}[y-(x^2+y^2)]\ dx\,dy$ que como se observa, no es fácil la integración respecto a x.
En polares: $V=\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\rho(\rho\operatorname{sen}\theta-\rho^2)\ d\rho d\theta$ o por simetría $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}(\rho^2\operatorname{sen}\theta-\rho^3)\ d\rho d\theta=$
$\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{4}{\operatorname{sen}}\theta\ d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\overset{2}{\operatorname{sen}}\theta)^2\ d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{2}\right)^2\ d\theta=\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\ d\theta=$

$$\frac{\pi}{32}\ \ unidades\ de\ volumen.$$

Observemos la contraimagen de D en el plano $\rho\theta$ (ver la figura 13.13)

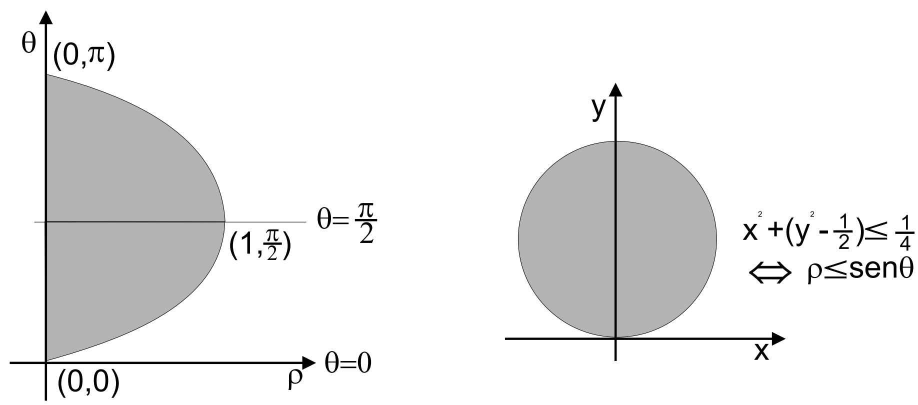

Figura 13.13:

Aquí $\rho=\operatorname{sen}\theta$, para $\theta=0\Rightarrow\rho=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\rho=1$, $\theta=\pi\Rightarrow\rho=0$ y como $\rho=\operatorname{sen}\theta$ representa a una curva en plano $\rho\theta$ y ρ es función contínua de θ ($\rho=f(\theta)=\operatorname{sen}\theta$), podemos pensar en la curva que va de $(0,0)$ al $(1,\frac{\pi}{2})$ al $(0,\pi)$ de una manera contínua, (así se tiene la idea de la contraimagen de D).

Problema 7
Sea D la región rayada de la figura

Calcular $\iint_D e^{(x+y)^2}\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\ dx\,dy.$
$\left(Sugerencia:\ x+y=u>0,\ \frac{y}{x}=v\neq -1\right)$. (ver la figura 13.14 en la página 136)

Solución
Hacer $\left.\begin{array}{r}x+y=u\\ \frac{y}{x}=v\end{array}\right\}\Rightarrow y=xv\Rightarrow x+xv=u\Rightarrow x=\frac{u}{v+1},\ y=\frac{uv}{v+1}$

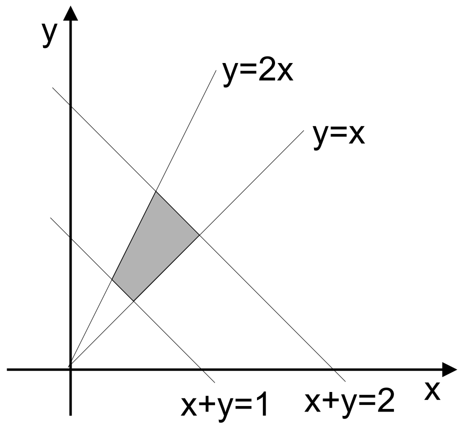

Figura 13.14:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v+1} & -\dfrac{u}{(v+1)^2} \\ \dfrac{v}{v+1} & u\dfrac{v+1-v}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v+1} & -\dfrac{u}{(v+1)^2} \\ \dfrac{v}{v+1} & \dfrac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2} \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} x+y=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{array} \right. .$$

Ahora bien, $\begin{array}{c} x+y=1 \Rightarrow u=1,\ \ x+y=2 \Rightarrow u=2 \\ y=x \Rightarrow v=1,\ \ y=2x \Rightarrow v=2 \end{array}$

Así, $D^* = T^{-1}(D)$ siendo T la transformación dada está graficada como un cuadrado de lados paralelos a los ejes u y v respectivamente (ver la figura 13.15)

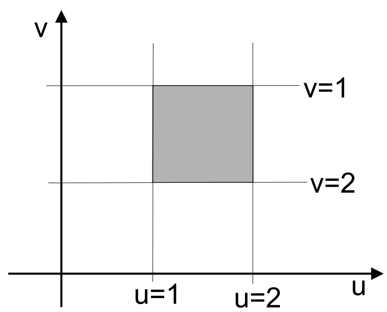

Figura 13.15:

Por tanto $I = \displaystyle\int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{(v+1)^2} e^{u^2} (1+v)^2 \, dudv = \int_1^2 \int_1^2 ue^{u^2} \, dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[e^{u^2}\right]_1^2 \, dv = \frac{1}{2}(e^4 - e).$

Problema 8
Demostrar que

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} e^{x+y} \cos \frac{y-x}{x+y} \, dy\, dx = (e^2+1) \operatorname{sen} 1$$

Solución

Hacer el cambio de variables $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$

y se llega a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 \int_{-v}^{+v} e^v \cos\frac{u}{v}\, dudv = \frac{1}{2}\int_0^2 ve^v \left(\operatorname{sen}\frac{u}{v}\right)_{u=-v}^{u=+v} dv = (\operatorname{sen} 1)\int_0^2 ve^v\, dv = (*)$

$(\operatorname{sen} 1)(ve^v - e^v)_0^2 = (e^2+1)\operatorname{sen} 1$

$(*)$ Integración por partes.

Problema 9
Calcular

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

con $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2-6y \leq 0\}$

Solución
$x^2+y^2-6y \leq 0 \Rightarrow x^2+(y-3)^2 \leq 9$
En polares $\rho = 6\operatorname{sen}\theta$\{Curva contínua con ρ función de θ\}.
θ varía de 0 a π
ρ varía de 0 a $6\operatorname{sen}\theta$ (ver la figura 13.16)

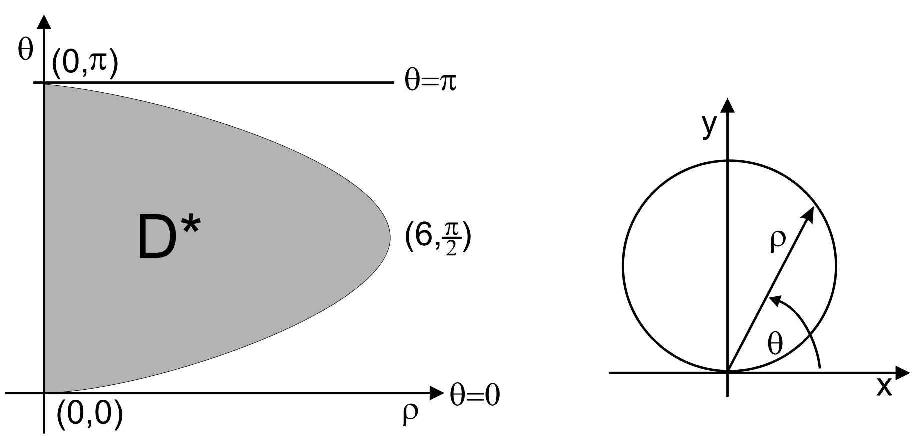

Figura 13.16:

Por tanto $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA = \int_0^\pi \int_0^{6\operatorname{sen}\theta} \rho\cdot\rho\, d\rho d\theta = \frac{6^3}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta =$

$$72\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 96$$

Problema 10
Considere la transformación definida por $T(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$
y sea $D^* = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$
(a) Dibuje $D = T^{-1}(D^*)$.

(b) Evalúe $\iint_D \ dx\,dy$

Solución
$\displaystyle\iint_D \ dx\,dy$ con $D^* = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0,\ v \geq 0\}$

(ver la figura 13.17)

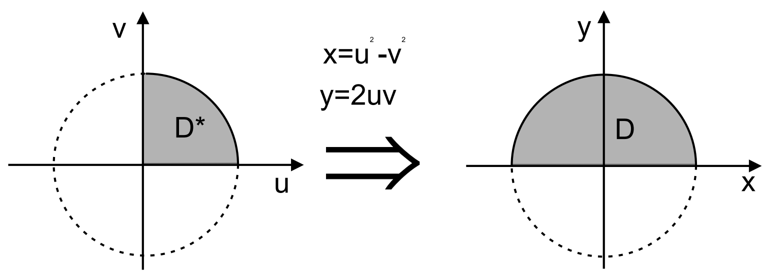

Figura 13.17:

$$\left.\begin{array}{c} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = (u^2+v^2)^2$$

pero $\left.\begin{array}{c} u^2+v^2 \leq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x^2+y^2 \leq 1 \\ y = 2uv \geq 0 \end{array}$. Por tal razón D es el semidisco superior en el plano xy.

Ahora: $\displaystyle\iint_D \ dx\,dy = A(D) = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ dx\,dy = (*)$

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \rho\ d\rho d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$(*)$ Transformación a coordenadas polares.

Problema 11
Calcular el trabajo efectuado por el Campo de fuerzas $F(x,y) = (x+y)\vec{\ss} + (y-x)\vec{\ae}$, para mover una partícula desde el punto $(4,0)$ una vuelta completa, a lo largo de la curva dada por

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

en sentido horario "$(-)$"

Solución
Como $\mathcal{C}$ es cerrada $= \partial D,\ D$ tipo III y $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = y-x$ con P y Q de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, podemos entonces aplicar el Teorema de Green: (ver la figura 13.18 en la página 139)

$$\oint_{\sigma} F\cdot d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

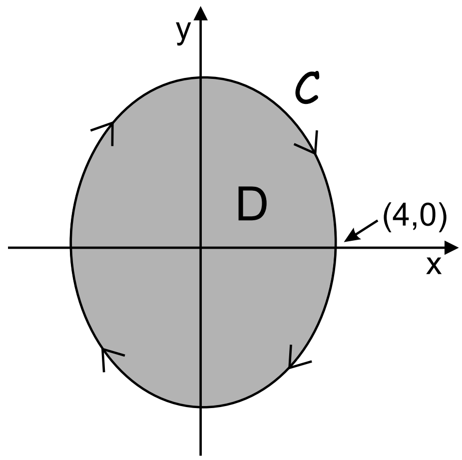

Figura 13.18:

pero en nuestro caso el sentido es "$(-)$", por tanto

$$\oint_{\sigma} F \cdot d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^-} P\,dx + Q\,dy = -\int\!\!\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int\!\!\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$\int\!\!\int_D [1-(-1)] = 2\int\!\!\int_D 1 = 2 \cdot Area(D) = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 5 = 40\pi \quad Unidades\ de\ trabajo$

Nota: Aunque en éste ejercicio no hay cambio de variables, se puso así para que se vea que no siempre es necesario hacerlo, sin embargo, observemos el próximo ejercicio.

Problema 12
Sea $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Calcular

$$\oint_{\partial D^+} (x^2 - y^3)\,dx + (y^2 + x^3)\,dy$$

Solución
Vamos a usar el Teorema de Green (el alumno debe verificar las condiciones del mismo).
La integral dada es

$$\int\!\!\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 3\int\!\!\int_D (x^2 + y^2)\,dA$$

observar que $\mathcal{C} = \partial D$ es una circunferencia, centro $(0,0)$, radio $= 4$. Por tanto

$3\int\!\!\int_D (x^2+y^2)\,dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^4 \rho \cdot \rho^2\,d\rho d\theta = \dfrac{3 \cdot 4^4}{4}\int_0^{2\pi} d\theta\,d\theta = 384\pi$

(El alumno puede intentar resolver la integral doble en Cartesianas para que observe las dificultades)

Problema 13
Calcular

$$\oint_{\mathcal{C}+} (x^4 - 3y^2 x)\, dx + (3x^2 y + 2y^6)\, dy$$

a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ constituída por el segmento $\overline{OA}$, el cual forma un ángulo conocido θ_0 con el eje x, el arco de circunferencia unitaria, $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{BO}$, el cual forma un ángulo $\theta_1 = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ (ver la figura 13.19)

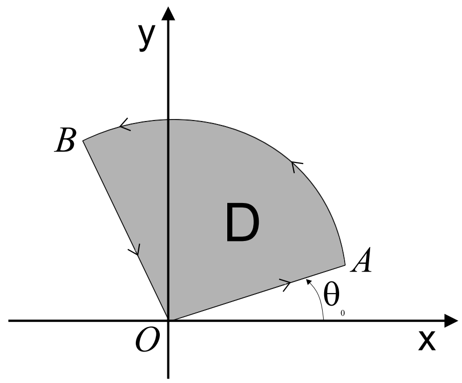

Figura 13.19:

Solución
Sean, $P(x,y) = x^4 - 3y^2 x$; $Q(x,y) = 3x^2 y - 2y^6$, funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto en la región D encerrada por $\mathcal{C}$ (recorrida en sentido "$(+)$").
Se concluye que P y $Q \in \mathcal{C}^1(D)$ y $\mathcal{C} = \partial D$ es una curva simple, cerrada "$(+)$". Aplicando el Teorema de Green:
$\oint_{\mathcal{C}} (x^4 - 3y^2 x)\, dx + (3x^2 y - 2y^6)\, dy = \iint_D (6xy + 6xy) = 12 \iint_D xy = (*)$ (ver la figura 13.20)

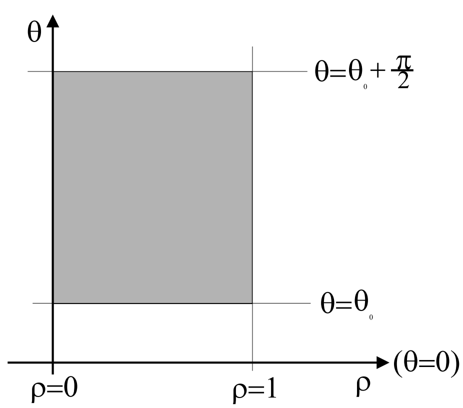

Figura 13.20:

$(*)$ Coordenadas polares.

$$12 \iint_{D^*} \rho(\rho\cos\theta)(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\ d\theta d\rho = 12 \int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi/2} \rho^3 \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2\theta)\right]\ d\theta d\rho =$$

$$6\int_0^1 \rho^3\left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_{\theta_0}^{\theta_0+\pi/2} d\rho = -3\int_0^1 \rho^3(\cos(2\theta_0+\pi)-\cos(2\theta_0))\,d\rho =$$

$$-3\int_0^1 \rho^3(-\cos(2\theta_0)-\cos 2\theta_0)\,d\rho = 6\int_0^1 \rho^4\cos(2\theta_0)\,d\rho = \frac{6}{4}\cos 2\theta_0 = \frac{3}{2}\cos 2\theta_0$$

o bien

$$\frac{3}{2}(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0)$$

Problema 14

Calcular

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial D^+} (xy+e^x+y)\,dx + (xy+x-ye^y)\,dy$$

con $\left\{\mathcal{C} = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$

Solución

$P(x,y) = xy+e^x+y$, $Q(x,y) = xy+x-ye^y$. P y Q son funciones elementales en $\mathbb{R}^2$. Por tanto lo son en D (región encerrada por $\mathcal{C}$). Así $P,Q \in \mathcal{C}^1(D)$ y $\partial D = \mathcal{C}$ es curva simple cerrada "(+)"

Teorema de Green:

$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_D (y+1-x-1) = \iint_D (y-x)$ (ver la figura 13.21)

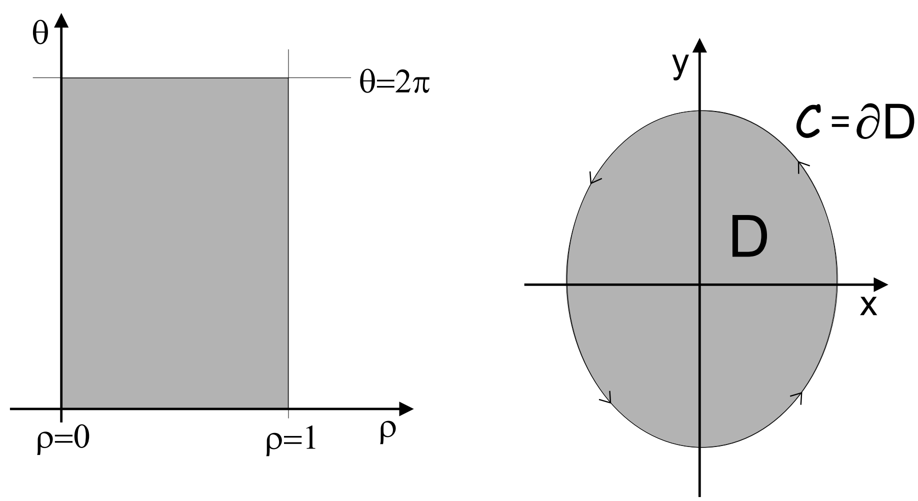

Figura 13.21:

En coordenadas elípticas:

$$\iint_{D^*} 6\rho(3\rho\operatorname{sen}\theta - 2\rho\cos\theta) = 6\int_0^1 \rho^2\,d\rho\int_0^2 \pi(3\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta)\,d\theta = 0$$

puesto que $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta = 0$

Observar que para los límites de ρ, ρ va desde 0 a 1, éste último obtenido de

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{4\rho^2\cos^2\theta}{4}+\frac{9\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{9}=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1$$

Capítulo 14

Integrales Triples

Objetivos

Estudiar la existencia de la integral triple para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, sobre paralelepípedos rectos y sobre regiones más generales.

14.1 Definición

Sea $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $P =$Paralelepípedo rectangular, si se efectua una particion P_{ijk}, paralelipédica de P, mediante planos paralelos a los planos xy, xz y yz respectivamente y si existe

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P_{ijk}\|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

con $\|P_{ijk}\| = max\{$diagonales de paralelepípedos parciales $\}$, se define entonces

$$\int\int\int_P f = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P_{ijk}\|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(i,j,k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

y se lee: Integral Triple de f sobre P. *Notaciones:*

$$\int\int\int_P f(x,y,z)\; dV, \quad \int\int\int_P f(x,y,z)\;\; dx\, dy\, dz, \quad \int\int\int_P f(x,y,z)\;\; dy\, dx\, dz, \quad etc.$$

Se demuestra que f **es integrable** sobre P si f **es contínua** en P. También se demuestra que si f no es contínua, pero es acotada con discontinuidades que son gráficas de funciones contínuas, también f es integrable (Ver Teoremas correspondientes a la integral doble).
También se demuestra, que si existe la integral triple sobre P, entonces son iguales a ella las 6 integrales iteradas que se pueden obtener al permutar $dx\, dy\, dz$. La definición dada arriba se extiende a $\int\int\int_Q f$, mas general que el paralelepípedo.

14.2 Integral Triple sobre regiones mas generales

Definición.
Sea $Q \subset \mathbb{R}^3$, Q es de *tipo I* si

$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \in [a, b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)],\ z \in [\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y)]\}$
donde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas y
$\gamma_1, \gamma_2 : D\ \ Tipo\ I\ \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas
Es decir, Q es *Tipo I* si $D = Proy_{xy}Q$ = Proyección de Q sobre el plano xy es Tipo I en $\mathbb{R}^2$ y $z \in [\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y)]$

Análogamente, siendo Q la misma región de *Tipo I*, pero definida
$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ y \in [c, d], x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)],\ z \in [\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y)]\}$
donde $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas y
$\gamma_1, \gamma_2 : D\ \ Tipo\ I\ \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuas
Q es *Tipo I* en $\mathbb{R}^3$ si $D = Proy_{xy}Q$ es tipo II y $z \in [\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y)]$
En el primer caso

$$\int\int\int_{Q\,Tipo\ I} f = \int\int_{D\,Tipo\ I} \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\right] dA =$$

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\, dy\, dx$$

En el segundo caso

$$\int\int\int_{Q\,Tipo\ I} f = \int\int_{D\,Tipo\ II} \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\right] dA =$$

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\, dx\, dy$$

Q será de *Tipo II* si $D = Proy_{xz}Q$ es Tipo I o II en el plano xz y $y \in [\gamma_1(x, z), \gamma_2(x, z)]$.
Q será de *Tipo III* si $D = Proy_{yz}Q$ es Tipo I o II en el plano yz y $y \in [\gamma_1(y, z), \gamma_2(y, z)]$.
Finalmente Q es *Tipo IV* si es Tipo I o II o III o combinaciones con regiones de esos tipos.

Observar además que en la definición dada al comienzo, integral triple como límite de sumas, si $f(x, y, z) = 1 \ \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P_{ijk}\|\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \quad Volumen\ de\ Q$$

Ahora bien, supongamos que Q es tipo I en $\mathbb{R}^3$, esto es $D = Proy_{xy}Q$, es Tipo I o II en $\mathbb{R}^2$ $z \in [\gamma_1, \gamma_2]$
Por ejemplo, sea D tipo I (ver la figura 14.1 en la página 145)
Barreremos la región D desde $x = a$ hasta $x = b$, entre los puntos de ordenadas $y_1(x)$ y $y_2(x)$, respectivamente levantamos una perpendicular genérica al plano xy, ésta cortará a la región Q en dos puntos cuyas terceras coordenadas son respectivamente, $z_1 = \gamma_1(x, y),\ z_2 = \gamma_2(x, y)$. Asi

$$\int\int\int_Q f(x, y, z) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\, dy\, dx$$

14.3 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Hallar el volumen de la pirámide acotada por los planos coordenados y por el plano de ecuación

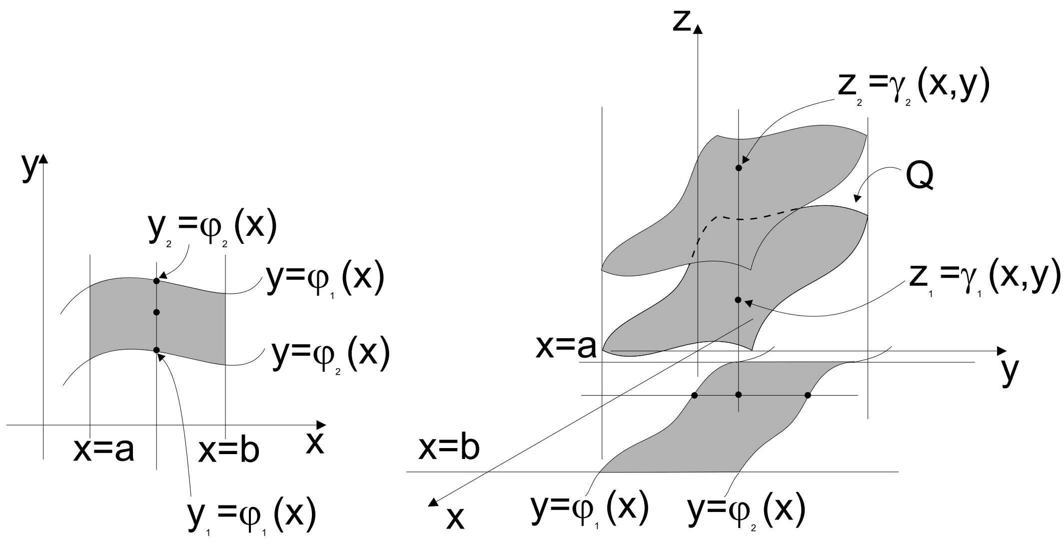

Figura 14.1:

$2x + 3y + z = 6$

Solución

$Proy_{xy}Q = D$ Tipo III en $\mathbb{R}^2$ (por ser Tipo I y Tipo II), lo que implica que Q es tipo I en $\mathbb{R}^3$ con $0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y$ (ver la figura 14.2)

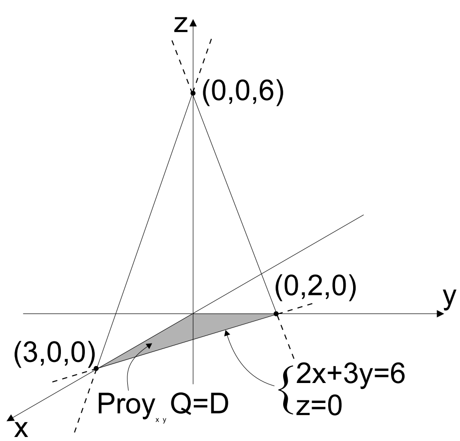

Figura 14.2:

$$Vol(Q) = \int\int\int_Q 1 = \int\int_D \left[\int_0^{6-2x-3y} \, dz\right] \, dA = \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} \int_0^{6-2x-3y} \, dz \underbrace{dy\, dx}_{(*)} =$$

(*) Hemos considerado D Tipo I en $\mathbb{R}^2$.

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} (6 - 2x - 3y) \; dy\, dx = \int_0^3 \left(6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right)_{y_1=0}^{y_2=\frac{1}{3}(6-2x)} \; dx =$$

$$\int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2}{3}x^2\right) \; dx = 6 \;\; unidades \; de \; volumen$$

Problema 2

Hacer el ejercicio anterior empleando integrales dobles

Solución

$Vol(Q) = \int\int_D f(x,y),$

con $f(x,y) = z = 6 - 2x - 3y$. Por tanto

$Vol(Q) = \int\int_D (6 - 2x - 3y)\ dA = \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} (6 - 2x - 3y)\ \ dy\, dx =$

que es uno de los pasos en el ejercicio (1). Directamente del ejercicio anterior

$$Vol(Q) = 6 \ \ unidades\ de\ volumen$$

Problema 3

Calcular $\int\int\int_Q y$, Q determinada por $z + x \leq 6,\ \ z \geq 0,\ \ y \leq 0,\ \ x \geq 3y^2$.

Solución

(ver la figura 14.3 en la página 147)

$\int\int\int_Q y = \int_0^6 \int_0^{-\sqrt{\frac{x}{3}}} \int_0^{6-x} y\ \ dz\, dy\, dx$ (D tipo I y tipo II, la consideramos Tipo I)

$$\int_0^6 \int_0^{-\sqrt{\frac{x}{3}}} y(6-x)\ \ dy\, dx = \int_0^6 (6-x) \left(\frac{1}{2}y^2\right)_0^{-\sqrt{\frac{x}{3}}}\ \ dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^6 (6x - x^2)\ \ dx = 6$$

Problema 4

(a) Describir la región de integracion mediante un dibujo

(b) Mostrar su proyección sobre el plano xy

(c) Calcular finalmente

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} x\ \ dz\, dy\, dx$$

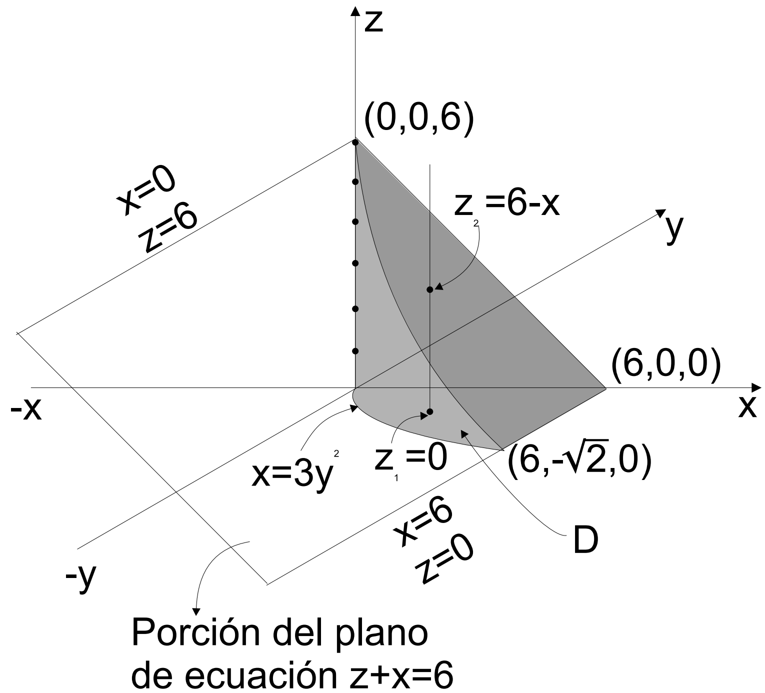

Figura 14.3:

Solución

(a) y (b) La región queda representada de la siguiente forma (ver la figura 14.4)

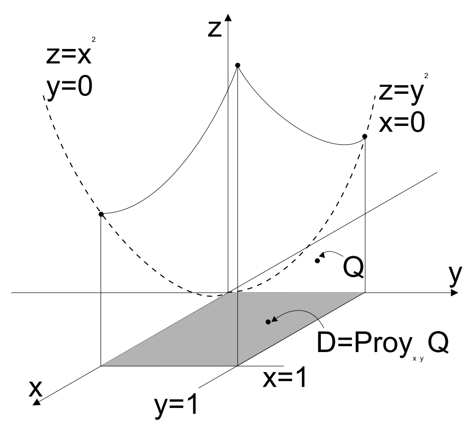

Figura 14.4:

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^{x^2+y^2} x\ \ dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 x(x^2+y^2)\ \ dy\,dx =$

$\displaystyle\int_0^1\left(x^3y+\frac{1}{3}xy^3\right)_0^1\ dx = \int_0^1\left(x^3+\frac{1}{3}x\right)\ dx = \frac{5}{12}$

Problema 5

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, limitado por el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, el plano de ecuación $z + y = a$ y por el plano $z = 0$.

(a) Dibuje Ω.

(b) Dibuje la Proyección de Ω sobre el plano yz y descríbala por medio de desigualdades.

(c) Complete los límites de integración para

$$\int\int\int_{\Omega} f \ dx\,dy\,dz = \int dy \int dz \int f \ dx$$

(d) Dibuje la proyección de Ω sobre el plano xz y descríbala por medio de desigualdades.

(e) Calcule $\int\int\int_{\Omega} dx\,dy\,dz$ mediante integrales iteradas del Tipo $\int dx \int dy \int dz$, en ese orden.

Solución

(a) La región Ω se presenta en el dibujo (ver la figura 14.5)

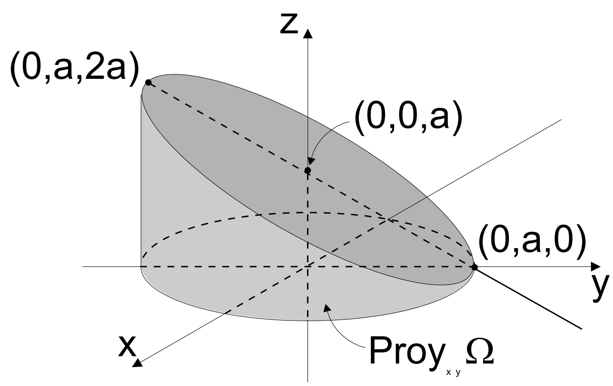

Figura 14.5:

(b) La Proyección de Ω sobre el plano yz se presenta en el dibujo (ver la figura 14.6)

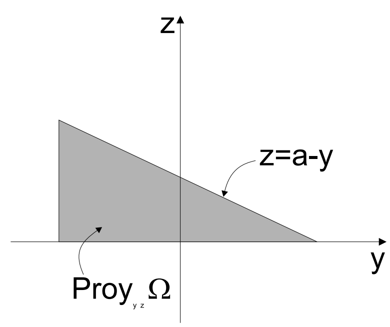

Figura 14.6:

$$Proy_{yz}\Omega = \{(y,z) \mid -a \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a - y\}$$

(c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dy \int_{0}^{a-y} dz \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f \ dx$

(d) La Proyección de Ω sobre el plano xz se presenta en el dibujo (ver la figura 14.7)

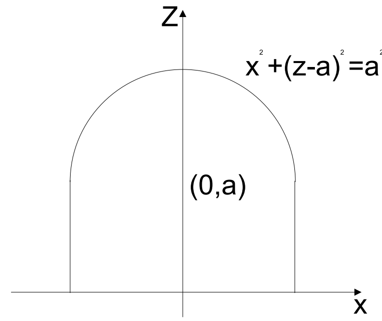

Figura 14.7:

$$Proy_{xz}\Omega = \{(x,z) \mid -a \leq x \leq a,\ 0 \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

(e) $\displaystyle\int\int\int_\Omega dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{a-y} dz = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (a-y)\ dy = \int_{-a}^{a} 2a\sqrt{a^2-x^2}\ dx =$

$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t \\ dx = -a \operatorname{sen} t dt \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} x = a \Rightarrow t = 0 \\ x = -a \Rightarrow t = \pi \end{array} \quad \Rightarrow$

$\displaystyle 2a^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\ dt = \frac{2a^3}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2t)dt = \pi a^3$

Capítulo 15

Cambio de Variables en la integral triple

Objetivos

En este capítulo, el alumno debe aprender a decidir cuándo es necesario un cambio de variables para evitar el cálculo de una integral triple muy complicada en coordenadas cartesianas.
En particular, estudiar las coordenadas cilíndricas, esféricas y elipsoidales.

15.1 Conceptos Básicos

Sea $f : Q \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f$ integrable sobre Q, queremos expresar $\displaystyle\iiint_Q f\, dv$ como una integral triple sobre Q^* según la transformación:

$$\begin{cases} T : Q^* \subset \mathbb{R}^3 & \to \quad Q \subset \mathbb{R}^3, T \in \mathcal{C}^1(Q^*) \\ (u,v,w) & \to \quad T(u,v,w) = (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) \end{cases}$$

con $x = g_1(u,v,w), y = g_2(u,v,w), z = g_3(u,v,w), (u,v,w) \in Q*$. Suponer además que T es uno a uno, y entonces tendremos que:

$$\iiint_Q f(x,y,z) = \iiint_{Q^*} f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)) Abs \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$$

con $Abs \left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$ = valor absoluto del determinante Jacobiano de x, y, z respecto de u, v, w

$$= Abs \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Los cambios de variables más usados en las integrales triples son:
(a) coordenadas cilíndricas.
(b) coordenadas esféricas.
(c) coordenadas elipsoidales.

(a) *Coordenadas cilíndricas.*

Un punto $P(x,y,z)$ en coordenadas cilíndricas es de la forma $\left\{\begin{array}{lllll} x & = & \rho\cos\theta & = & g_1(\rho,\theta,z) \\ y & = & \rho\operatorname{sen}\theta & = & g_2(\rho,\theta,z) \\ z & = & z & = & g_3(\rho,\theta,z) \end{array}\right.$,

con $\theta\in[0,2\pi], \rho\in[0,\infty)$. (ver la figura 15.1)

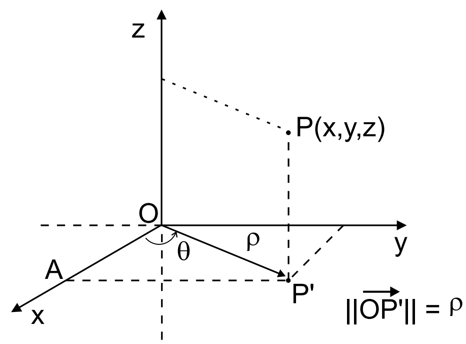

Figura 15.1:

Observar que en el triángulo rectángulo OAP' (donde P' es la proyección de P en el plano xy), se tiene : $OA = x = \|\vec{OP'}\|\cos\theta = \rho\cos\theta, AP' = y = \|\vec{OP'}\|\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\theta$, con $\rho = \|\vec{OP'}\|$ y $P'P = z$.
Ahora bien, el determinante Jacobiano de la transformación es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta = \rho.$$

(b) *Coordenadas esféricas.*

Se tiene el punto $P(x,y,z)$ de la forma: $\left\{\begin{array}{lll} x & = & \rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ y & = & \rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ z & = & \rho\cos\varphi \end{array}\right.$, con $\theta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,\pi], \rho\in[0,\infty), \rho = \|\vec{OP}\|$ (ver la figura 15.2 en la página 153)
En el triángulo rectángulo OAP' se tiene $OA = x = OP'\cos\theta$, y en el triángulo rectángulo $OP'P$ es $OP' = \|\vec{OP}\|\operatorname{sen}\varphi = \rho\operatorname{sen}\varphi$. (Obsévese la diferencia con el caso anterior.)
Por lo tanto, $x = \rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi, y = AP' = OP'\operatorname{sen}\theta = \rho(\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\theta = \rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi$, y, finalmente, $z = PP' = \|\vec{OP}\|\cos\varphi = \rho\cos\varphi$.

Hay que recalcar que en las coordenadas cilíndricas ρ es el módulo del radio vector de la proyección de P sobre el plano xy, mientras que en las esféricas ρ es el módulo del radio vector de P. Obsérvese que en las cilíndricas $\left\{\begin{array}{lll} x^2+y^2 & = & \rho^2 \\ z & = & z \end{array}\right.$ que es la ecuación de un cilindro, y en las esféricas $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ que corresponde a la ecuación de una esfera. Se demuestra en un ejercicio que Abs det $\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right) = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$.

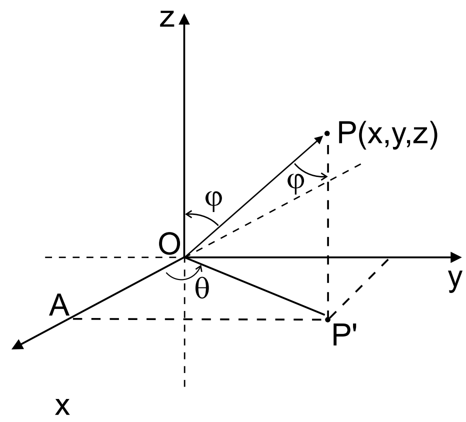

Figura 15.2:

(c) *Coordenadas elipsoidales.*

Los puntos son de la forma $\begin{cases} x &=& a\rho(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y &=& b\rho(\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z &=& c\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, que es la ecuación de un elipsoide. Queda para el alumno comprobar que $det\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right)=abc\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

Nota: Vamos a dar una brave explicación sobre conos.
La ecuación general de un cono de vértice $(0,0,0)$, eje z y semi-ángulo cónico φ es $x^2+y^2 = (\tan^2\varphi)z^2$ (ver la figura 15.3)

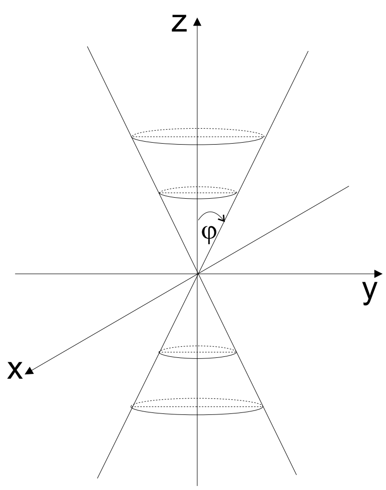

Figura 15.3:

Análogamente, para conos con vértice en $(0,0,0)$, semiángulo cónico φ y eje y o x, se tiene respectivamente, $x^2+z^2=(\tan^2\varphi)y^2, y^2+z^2=(\tan^2\varphi)x^2$.
Para el primero de los nombrados, $x^2+y^2=(\tan^2\varphi)z^2$, el dibujo es el que se muestra en la figura 15.3.
Ahora bien, en la mayoría de los textos, aparece el cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$, donde $\tan^2\varphi = 1 \Rightarrow \varphi=\pi/4$.

Se recomienda estudiar con detenimiento los ejercicios $5, 8, 9$ de este capítulo y el 11 del capítulo siguiente.

15.2 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies dadas a continuación: $z = 0, x^2 + y^2 = 10, z = x^2 + y^2$.

Solución
$z = 0$ es el plano xy, $x^2 + y^2 = 10$ es un cilindro y $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide circular. Se trata entonces de un vaso cilíndrico con un hueco parabólico. (ver la figura 15.4)

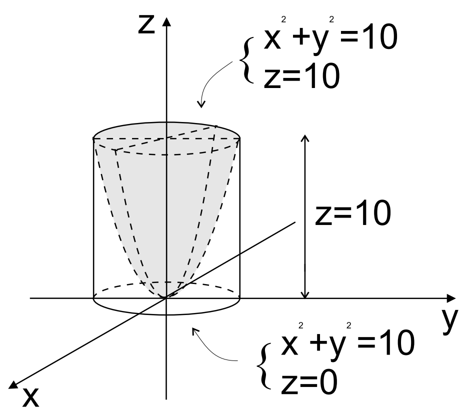

Figura 15.4:

$$V = \iiint_Q 1 = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} dz\, dy\, dx$$

Al tratar de resolver la integral en coordenadas cartesianas, se ve lo engorroso que resulta, puesto que

$$\int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right)_{y_1=-\sqrt{10-x^2}}^{y_2=\sqrt{10-x^2}} dx,$$

por lo que se ve que es mejor hacer un cambio de variables.
Pasando a coordenadas cilíndricas:

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{\rho^2} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \;\; d\rho\, d\theta = \frac{\sqrt{10^4}}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi \times 100}{4} = 50\pi$ unidades de volumen.

Obsévese que por ser el sólido S simétrico respecto del eje z, se puede calcular

$V(S) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 50\pi$ unidades de volumen.

Problema 2
Calcular el volumen del sólido obtenido al intersectar los sólidos dados por $x^2+y^2-7x \le 0, \quad x^2+y^2+z^2 \le 49$.

Solución
$x^2+y^2-7x \le 0 \Rightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+y^2 \le \dfrac{49}{4}$, que corresponde a la ecuación de un cilindro, y $x^2+y^2+z^2 \le 49$ es la de una esfera.
Por comodidad, para visualizar la figura, giramos los ejes x y y de modo que queden como se indica en el dibujo (ver la figura 15.5)

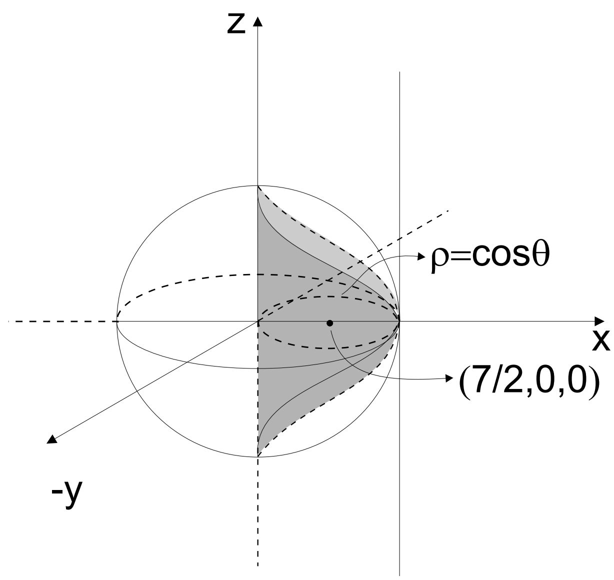

Figura 15.5:

Ahora bien, al estar envueltos en el problema un cilindro y una esfera, es aconsejable utilizar las coordenadas más simples entre las cilíndricas y las esféricas, es decir, usar coordenadas cilíndricas.
La esfera $x^2+y^2+z^2 \le 49 \Rightarrow \rho^2+z^2 \le 49$.
El cilindro $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+y^2 \le \dfrac{49}{4}, \Rightarrow \rho^2-7\rho\cos\theta \le 0 \Rightarrow \rho \le 7\cos\theta$, ya que $\rho=0$ corresponde al origen.
Por simetría respecto al plano xz y al xy, se tiene:

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{7\cos\theta}\int_0^{\sqrt{49-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

Los límites de integración respecto de z son evidentes, en cambio, los límites para ρ y θ tenemos que hallarlos por la contraimagen del semidisco $x^2-7x+y^2 \le 0$ en cilindricas (ver la figura 15.6 en la página 156)
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{7\cos\theta} \rho\sqrt{49-\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 4\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(49-\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=7\cos\theta}\, d\theta \\ &= -\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}[(49-49\cos^2\theta)^{3/2}-49^{3/2}]\, d\theta = -\frac{4}{3}\times 7^3\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}^3\theta-1)\, d\theta \end{aligned}$$

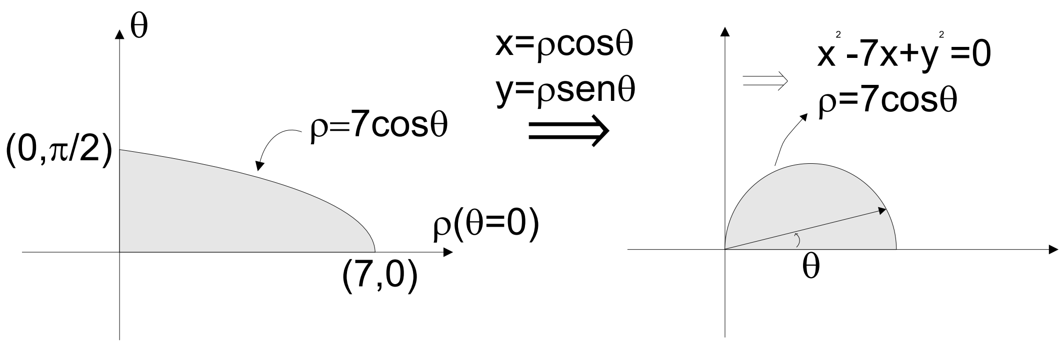

Figura 15.6:

$$= \frac{4}{3}\times 7^3\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^3\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}\times 7^3\times\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\times 7^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Ahora, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}[\operatorname{sen}\theta-(\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta]\,d\theta = (-\cos\theta)_0^{\pi/2}+\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}$

Por lo tanto, $V(S)=\dfrac{4}{3}\times 7^3\times\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}\times 7^3\times\dfrac{2}{3}=2\times 7^3\dfrac{3\pi-4}{9}$ unidades de volumen.

Problema 3

Demostrar que el volumen de una esfera de radio R es $V=4\pi R^3/3$.

Solución

Parece obvio utilizar coordenadas esféricas. Por simetría, se tiene: (ver la figura 15.7)

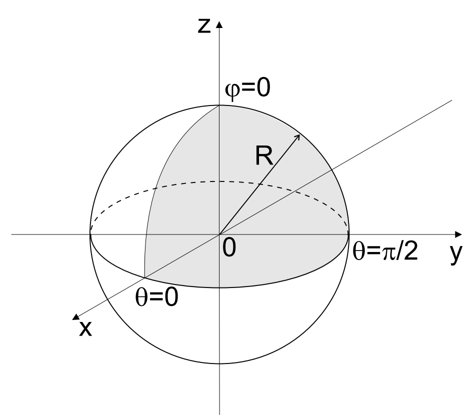

Figura 15.7:

$$V=8\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^R\rho^2(-\cos\varphi)_0^{\pi/2}\,d\rho\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^R\rho^2\,d\rho\,d\theta =$$

$$8\int_0^{\pi/2}\frac{R^3}{3}\,d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Observe lo engorroso que sería utilizando coordenadas cartesianas:

$V = 8\displaystyle\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^R dz\,dy\,dx = 8\int_0^R r\sqrt{r^2-x^2}dx$ para lo que es necesario hacer cambio a trigono-
métricas, etc.

Problema 4
Calcular el volumen del sólido obtenido al intersectar los sólidos dados por $x^2+y^2+z^2 \leq 16$ y $x^2+y^2 \leq 4$.

Solución
$x^2+y^2+z^2 \leq 16, x^2+y^2 \leq 4.$ (ver la figura 15.8)

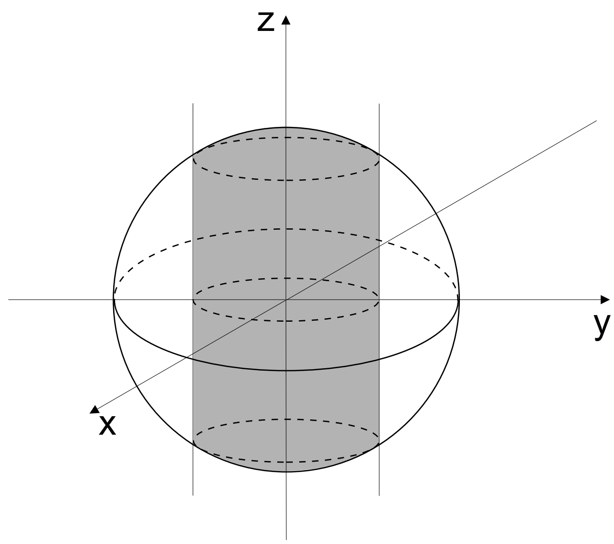

Figura 15.8:

En coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho\sqrt{16-\rho^2}\,d\rho\,d\theta = -8\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(16-\rho^2)^{3/2}|_0^2\,d\theta \\ &= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(2^3\times 3\sqrt{3}-2^6)d\theta = \frac{8}{3}\frac{\pi}{2}(2^6-24\sqrt{3}) = \frac{32}{3}\pi(8-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

unidades de volumen.

Problema 5

Calcular el volumen del sólido S acotado superiormente por la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente por la supeficie dada por $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$.

Solución
$x^2+y^2+z^2=16, z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 16 \\ 3(x^2+y^2) & = & z^2 \end{array}\right. \Rightarrow x^2+y^2+3x^2+3y^2=16 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ z & = & 2\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \text{(ver la figura 15.9)}$$

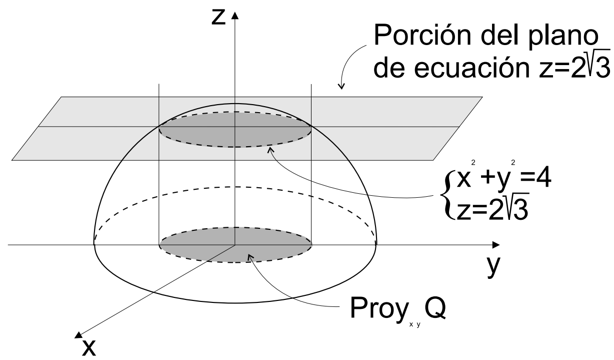

Figura 15.9:

Las ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ z & = & 2\sqrt{3} \end{array}\right.$ representan una circunferencia de radio 2 con centro en el eje z sobre el plano de ecuación $z=2\sqrt{3}$ (ver la figura 15.10)

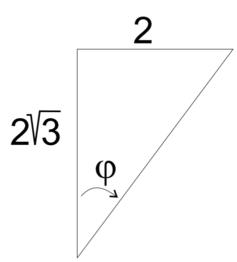

Figura 15.10:

Además, se tiene que:
$\tan\varphi=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$, que es la ecuación de la parte superior de la superficie cónica de semi-ángulo cónico $\pi/6$.

Luego, en coordenadas esféricas tenemos:
$V=4\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^4(\rho^2\operatorname{sen}\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=4\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\frac{64}{3}(\operatorname{sen}\varphi)\,d\theta\,d\varphi=4\times\frac{64}{3}\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=$ $\dfrac{64\pi}{3}(2-\sqrt{3})$ unidades de volumen.
O bien,
$V=\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi}\int_0^4(\rho^2\operatorname{sen}\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{3})$ unidades de volumen.

Observación. El alumno puede hacer también los cálculos utilizando coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_{\sqrt{3\rho^2}}^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (\rho\sqrt{16-\rho^2}-\sqrt{3}\times\rho^2)\, d\rho\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left[\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}(16-\rho^2)^{3/2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\rho^3\right]_0^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{3}3\sqrt{3}\times 8-\frac{\sqrt{3}}{3}8+\frac{64}{3}\right) d\theta \text{ uni-} \\ &= 4\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{64-32\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{64\pi}{3}(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

dades de volumen.

Problema 6

Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $y=z^2+x^2, y=z$.

Solución

$y=z^2+x^2, y=z$. Si hacemos $x=0,\ z=0$ se tiene: $x=0\Rightarrow y=z^2, z=0\to y=x^2$.
El corte producido por el plano de ecuación $y=z$ a el paraboloide dado por $y=z^2+x^2$ es una región plana bordeada por una curva cuya ecuación se obtiene intersectando $\left\{\begin{array}{rcl} y &=& z^2+x^2 \\ y &=& z \end{array}\right.$.
Su proyección en el plano xz se obtiene haciendo $y=0\Rightarrow$
$\left\{\begin{array}{rcl} z &=& z^2+x^2 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& z^2-z+x^2 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1/4 &=& (z-1/2)^2+x^2 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$,
que se trata de una circunferencia de centro $(0,0,1/2)$ y radio $1/2$.

En coordenadas cilíndricas, para el triedo zxy (en este orden) se tiene que:
$z=\rho\cos\theta, x=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, y=y$,
por lo que $Abs\ det\dfrac{\partial(z,x,y)}{\partial(\rho,\theta,y)}=\rho$.
Por lo tanto,
$V=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_{\rho^2}^{\rho\cos\theta}\rho\, dy\, d\rho\, d\theta$, con los límites de integración de ρ calculados de la siguiente manera: $z^2-z+x^2=0\Rightarrow\rho^2\cos^2\theta-\rho\cos\theta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta=0\Leftrightarrow\rho^2=\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho=\cos\theta$, y los límites de y vienen dados por $y_1=z^2+x^2=\rho^2, y_2=z=\rho\cos\theta$ (ver la figura 15.11 en la página 160)
Finalmente,
$V=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\rho(\rho\cos\theta-\rho^2)\, d\rho\, d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\rho^3}{3}\cos\theta-\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho_1=0}^{\rho_2=\cos\theta} d\theta=\frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta$,
ahora bien,

$$\begin{aligned} \int\cos^4\theta\, d\theta &= \int(\cos^2\theta)^2\, d\theta=\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{1}{4}\int[1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)]\, d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int\left[1+2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right] d\theta=\frac{1}{4}[\theta+\mathrm{sen}(2\theta)+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(4\theta)] \\ &= \frac{3}{8}\theta+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta)+\frac{1}{32}\,\mathrm{sen}(4\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

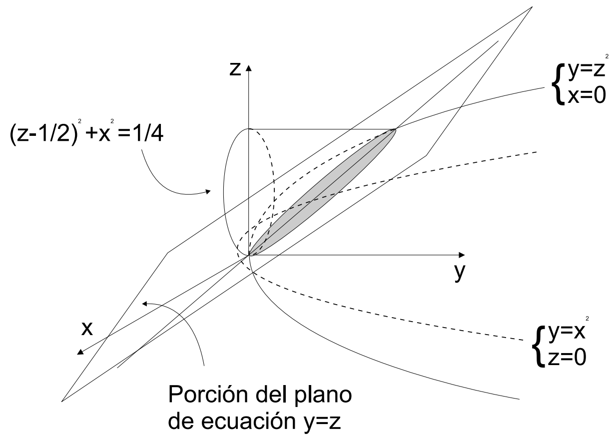

Figura 15.11:

$$V = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2\theta) + \frac{1}{32}\,\mathrm{sen}(4\theta)\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{32}\pi \text{ unidades de volumen.}$$

Nota. El alumno puede también recurrir al siguiente argumento: Imaginar que el paraboloide tiene como eje el z, por lo que su ecuación será $z = x^2 + y^2$, cortado por el plano de ecuación $y = z$. La proyección se hace ahora sobre el plano xy y queda:

$x^2 + y^2 = y \Rightarrow y^2 - y + x^2 = 0 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}$ (ver la figura 15.12)

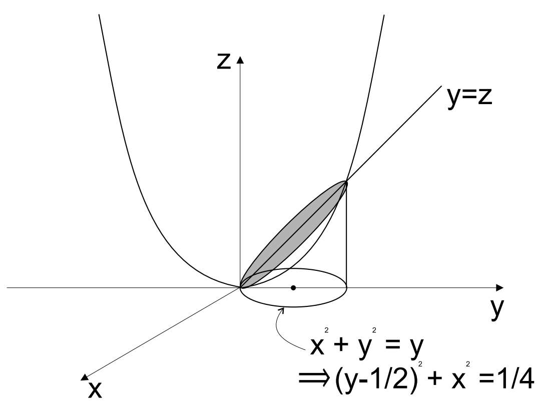

Figura 15.12:

Aquí, $x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z = z,\ det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho.$

Así,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\mathrm{sen}\,\theta}\int_{\rho^2}^{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{32}\pi \text{ unidades de volumen.}$$

Análogamente, se puede hacer por simetría con el plano zy y queda:

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\mathrm{sen}\,\theta}\int_{\rho^2}^{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{32}\pi \text{ unidades de volumen.}$$

Problema 7
Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = x^2 + y^2, z = 4$.

Solución
$z = x^2 + y^2, z = 4. \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ z &= 4 \end{cases}$ (ver la figura 15.13)

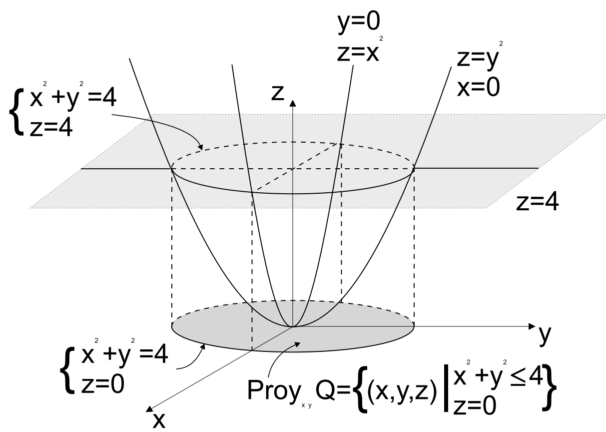

Figura 15.13:

En coordenadas cilíndricas:
$V = \iiint_Q 1dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^4 \rho\, dz\, d\rho d\,\theta = 8\pi$ unidades de volumen.
El alumno puede observar que también se resuelve de la siguiente manera:
$V = V_1 - V_2 =$ volumen del cilindro $-$ volumen bajo el paraboloide, por lo que queda,
$V = \pi\times 2^2\times 4 - \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 16\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3 d\rho\, d\theta = 16\pi - \int_0^{2\pi}\frac{16}{4}\,d\theta = 16\pi - 2\pi\times 4 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$ unidades de volumen.

Problema 8
Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por la superficie dada por $z^2 = x^2 + y^2$, inferiormente por el plano xy y lateralmente por la superficie $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Solución
$z^2 = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$, donde $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \rho = 2\operatorname{sen}\theta$ (ver la figura 15.14 en la página 162)
En coordenadas cilíndricas, se tiene que:
$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}\int_0^{\rho} \rho\, dz\, d\rho\,\theta = \frac{32}{9}$ unidades de volumen.

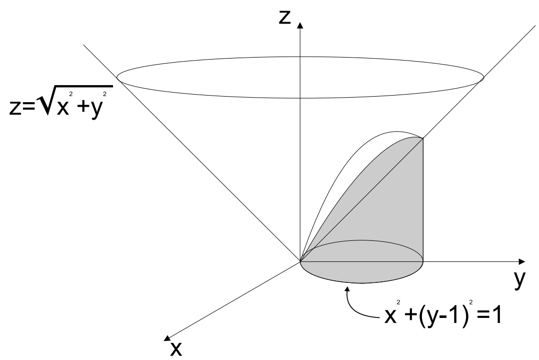

Figura 15.14:

Problema 9

Calcular $\iiint_Q ydV, Q$ acotado superiormente e inferiormente por $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=81\}$ y lateralmente por $\{(x,y,z)|1/3(x^2+y^2)=z^2\}$.

Solución

$\iiint_Q y\,dV, Q \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 81 \\ 1/3(x^2+y^2) & = & z^2 \end{array} \right. \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{243}{4} = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2, z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{243}{4}} = \pm\frac{9}{2},$

que es una circunferencia de radio $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ con centro en el eje z a la altura $z=\frac{9}{2}$ y la circunferencia $x^2+y^2=\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2$, a la altura $z=-\frac{9}{2}$. (ver la figura 15.15)

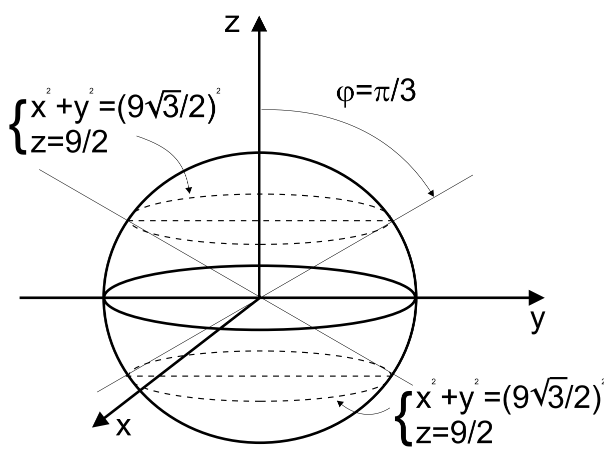

Figura 15.15:

Por la figura, se tiene que:

$\tan\varphi = \frac{9\sqrt{3}/2}{9/2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$

Luego, en coordenadas esféricas, queda:

$$\iiint_Q ydV = 2\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{9}(\rho^2 \operatorname{sen}\varphi)(\rho \operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}\int_0^{9}\rho^3(\operatorname{sen}^2\varphi)(\operatorname{sen}\theta)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$
$$2\frac{9^4}{4}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\varphi)(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

Ahora, como $\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0 \Rightarrow \iiint_Q y\, dV = 0.$

Problema 10

Calcular $\displaystyle\iiint_Q xdV, Q$ la porción de superficie definida por $9x^2 + y^2 + 6z^2 = 36, z \geq 0.$

Solución

$\displaystyle\iiint_Q x\, dV, Q : 9x^2 + y^2 + 6z^2 = 36, z \geq 0.$

Dividiendo la primera expresión por 36, queda

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{6} = 1, z \geq 0.$

Se trata de la porción superior de un elipsoide de semiejes: $a = 2, b = 6, c = \sqrt{6}$ (ver la figura 15.16)

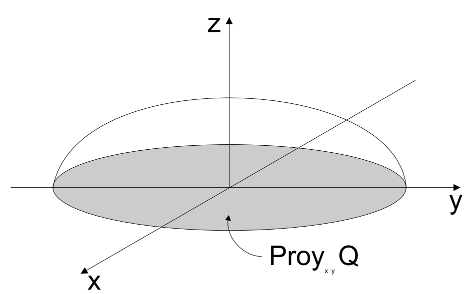

Figura 15.16:

Luego, pasando a coordenadas elipsoidales , queda:

$x = 2\rho(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi, y = 6\rho(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi, z = \sqrt{6}\rho\cos\varphi, Abs\ \ det\left(\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right) = 12\sqrt{6}\rho^2\operatorname{sen}\varphi.$

Luego,

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{6} = \rho^2(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^2\varphi+\rho^2(\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi =$
$1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$. Por lo tanto,

$$\iiint_Q xdV \quad = \quad 24\sqrt{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\rho^3(\cos\theta)(\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 6\sqrt{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)(\operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \quad 6\sqrt{6}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\varphi)(\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi = 0$$

toda vez que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$.

Capítulo 16

Aplicaciones de las integrales dobles y triples

Objetivos

En este importante capítulo, el alumno aprenderá a hacer uso de las integrales dobles y de las triples para diversas aplicaciones, tales como área, masa de una lámina plana, momentos de inercia de una lámina plana respecto a los ejes x, y o del origen; centro de masa, centroide de una lámina plana, etc. Así mismo, verá las aplicaciones de las integrales triples al cálculo del volumen de un sólido, centro de masa, centroide, momentos respecto a los planos coordenados etc.

16.1 Aplicaciones sobre una lámina plana

Si se tiene una lámina plana representada por una región D en $\mathbb{R}^2$.

a)Area de la lámina.

$A(D) = \int\int_D 1$

b)Masa de la lámina.

$M(D) = \int\int_D \delta(x, y)$, $\delta(x, y) =$densidad superficial en cada $(x, y) \in D$.

c)Momento de Inercia respecto al eje x.

$Ix = \int\int_D y^2\delta(x, y)$

d)Momento de Inercia respecto al eje y.

$Iy = \int\int_D x^2\delta(x, y)$

e)Momento de Inercia respecto al origen de las coordenadas.

$I_0 = I_x + I_y = \int\int_D (x^2 + y^2)\delta(x, y)$

f)Centro de Masa de D; (X_M, Y_M)

$X_M = \dfrac{1}{M(D)} \int\int_D x\delta(x, y)$

$Y_M = \dfrac{1}{M(D)} \iint_D y\delta(x,y)$

g)Centroide de D; (X_c, Y_c)

Aquí $\delta(x,y) = \ constante\ = c,\ \ M(D) = A(D) \cdot \delta(x,y) = c \cdot A(D)$. Por tanto

$X_c = \dfrac{1}{c \cdot A} \iint_D x \cdot c = \dfrac{1}{A} \iint_D x$

$Y_c = \dfrac{1}{c \cdot A} \iint_D y \cdot c = \dfrac{1}{A} \iint_D y$

16.2 Aplicaciones para un sólido en $\mathbb{R}^3$

Para un sólido en $\mathbb{R}^3$ representado por Q

h)Volúmen del sólido.

$V(Q) = \iiint_Q 1$

i)Masa del sólido.

$M(Q) = \iiint_Q \delta(x,y,z),\ \ \delta(x,y,z) =$densidad volumétrica en cada $(x,y,z) \in Q$.

j)Centro de Masa de Q; (X_M, Y_M, Z_M)

$X_M = \dfrac{1}{M(Q)} \iiint_Q x\delta(x,y,z)$

$Y_M = \dfrac{1}{M(Q)} \iiint_Q y\delta(x,y,z)$

$Z_M = \dfrac{1}{M(Q)} \iiint_Q z\delta(x,y,z)$

k)Centroide de D; (X_c, Y_c, Z_c)

Aquí $\delta(x,y,z) = \ constante\ = c,\ \ M(Q) = V(Q) \cdot \delta(x,y,z) = c \cdot V(Q)$. Por tanto

$X_c = \dfrac{1}{V} \iiint_Q x$

$Y_c = \dfrac{1}{V} \iiint_Q y$

$Z_c = \dfrac{1}{V} \iiint_Q z$

l)Momentos respecto a los planos coordenados.

$I_{xy} = \iiint_Q z^2\delta(x,y,z)$

$I_{yz} = \iiint_Q x^2\delta(x,y,z)$

$I_{xz} = \iiint_Q y^2\delta(x,y,z)$

m)Momentos respecto a los ejes coordenados.

$I_x = I_{xy} + I_{xz}$
$I_y = I_{yx} + I_{yz}$
$I_z = I_{zx} + I_{zy}$
n)Momentos de inercia geométricos respecto a los ejes coordenados.

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)$$

16.3 Ejercicios Resueltos

Problema 1
Hallar el área de la región D determinada por el eje x, la curva de ecuación $y = e^{\frac{1}{2}x}$ y las rectas dadas por $x = 0$ y $x = 2$.

Solución
(ver la figura 16.1)

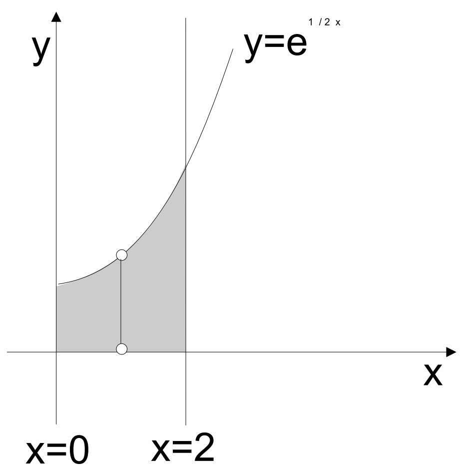

Figura 16.1:

$$A(D) = \iint_D 1 = \int_0^2 \int_0^{e^{\frac{1}{2}x}} dydx, \quad (D \text{ Tipo I}) \Rightarrow$$

$$A(D) = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}\, dx = 2\left[e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = 2(e-1) \quad Unidades\ de\ Area$$

Problema 2
Sea D la región del problema (1), suponer que la densidad en cada punto $(x, y) \in D$ es $\delta(x, y) = x$. Hallar la masa de D.

Solución

$$M(D)=\iint_D \delta(x,y)=\iint_D x=\int_0^2\int_0^{e^{\frac{1}{2}x}} x\ dydx=\int_0^2 xe^{\frac{1}{2}x}\ dx=$$

$$\left(2e^{\frac{1}{2}x}\right)_0^2-2\int_0^2 e^{\frac{1}{2}x}\ dx=4e-4(e-1)=4\ \ Unidades\ de\ Masa$$

Problema 3

Calcular la coordenada X_M del centro de masa de una lámina plana representada por D la región encerrada por $x^2+y^2-y=0$, $x\geq 0$ si la densidad en cada punto $(x,y)\in D$ viene dada por $\delta(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución

$$D:\ x^2+y^2-y=0\ \Leftrightarrow\ x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4},\ \ \delta(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$X_M=\frac{1}{M(D)}\iint_D x\delta(x,y)=\frac{1}{M(D)}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{(ver la figura 16.2)}$$

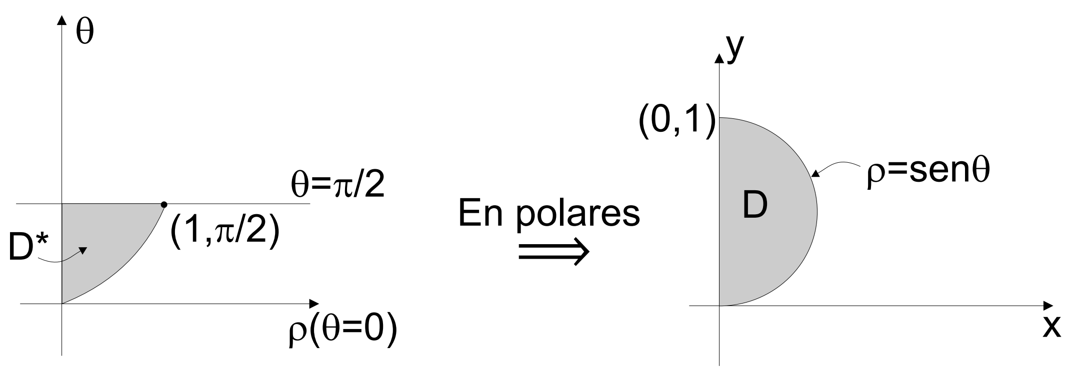

Figura 16.2:

En polares: $M(D)=\iint_D \delta(x,y)=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\rho\cdot\rho\ d\rho d\theta=\frac{2}{9}\ \ Unidades\ de\ Masa\ \ \Rightarrow$

$$X_M=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\rho\cdot\rho(\cos\theta)\rho\ d\rho d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}(\overset{4}{\operatorname{sen}}\theta)\cos\theta\ d\theta=\frac{9}{2\cdot 4}\frac{1}{5}\left(\overset{5}{\operatorname{sen}}\theta\right)_0^{\pi/2}=\frac{9}{40}$$

Se deja al alumno el cálculo de Y_M.

Problema 4

Hallar el momento de inercia respecto al origen, para una placa delgada representada por la región plana D, la cual está limitada por las curvas de ecuaciones: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$, $x=0$, $y=0$ y tiene densidad $\delta(x,y)=1$.

Solución
$D\left\{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,\ x=0,\ y=0;\ \ \delta(x,y)=1\right.$

$I_0=I_x+I_y=\iint_{D(Tipo\ I)}(x^2+y^2)=\int_0^2\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}(x^2+y^2)\ dydx=$ (ver la figura 16.3)

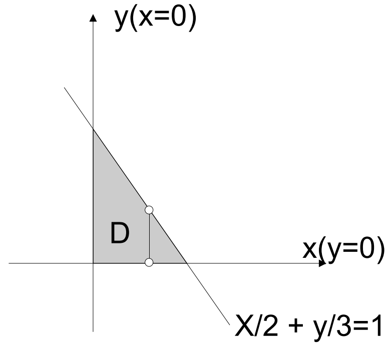

Figura 16.3:

$$=\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)_{y_1=0}^{y_2=\frac{3}{2}(2-x)}\ dx=\int_0^2\left[\frac{3}{2}x^2(2-x)+\frac{9}{8}(2-x)^3\right]\ dx$$
$$=\int_0^2\left[\frac{3}{2}(2x^2-x^3)+\frac{9}{8}(2-x)^3\right]\ dx=\left[\frac{3}{2}(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)-\frac{9}{32}(2-x)^4\right]_0^2=\frac{13}{2}$$

Problema 5
Calcular la coordenada Z_c del centroide del sólido Q, obteniéndose Q de intersectar la esfera dada por $x^2+y^2+z^2\leq 49$ con el cilindro $x^2+y^2-7x\leq 0$.

Solución
Z_c para $Q:\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 49\}\cap\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-7x\leq 0\}$
$Z_c=\dfrac{1}{V(Q)}\iiint_Q z$. Ahora, en el problema C14-(2) se encontró que $V(Q)=2\cdot 7^3\frac{3\pi-4}{9}$, vamos a designarlo por V y al final lo remplazaremos también por su valor. Así que $V\cdot Z_c=\iiint_Q z$, la figura la dibujamos también al resolver C14-(2). y vimos que es necesario trabajar en Coordenadas Cilíndricas. Por tanto

$$V\cdot Z_c=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{7\cos\theta}\int_{-\sqrt{49-\rho^2}}^{\sqrt{49-\rho^2}}\rho\cdot z\ dzd\rho d\theta$$

obsérvese que aquí los límites de integración respecto a θ y a z son distintos, pero ésto se debe a que en el ejercicio antes mencionado, se calculó $\frac{1}{4}V(Q)$ y luego se multiplicó por 4. Por tanto

$$V\cdot Z_c=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{7\cos\theta}\rho\sqrt{49-\rho^2}d\rho d\theta=2\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(49-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{7\cos\theta}\ d\theta$$

como ya se hicieron los cálculos en C14-(2) resumimos.

$$V \cdot Z_c = \frac{2}{3}7^3\pi \;\Rightarrow\; Z_c = \frac{\frac{2}{3}7^3\pi}{2\frac{3\pi-4}{9}7^3} = \frac{3\pi}{3\pi-4}$$

Problema 6

Calcular el momento de inercia I_Z, para el sólido Q acotado por el plano de ecuación $z=0$ y por la superficie dada por: $x^2+y^2+z=5$, conociendo la densidad $\delta(x,y,z)=\dfrac{12}{125}$.

Solución

$$Q\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z=5 \end{cases} \;;\quad \delta(x,y,z)=\frac{12}{125}$$

$$I_z = \frac{12}{125}\iiint_Q (x^2+y^2)$$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=5$
$x=y=0 \Rightarrow z=5$
$x=0 \Rightarrow z=y^2+5;\;\; y=0 \Rightarrow z=x^2+5$ (ver la figura 16.4)

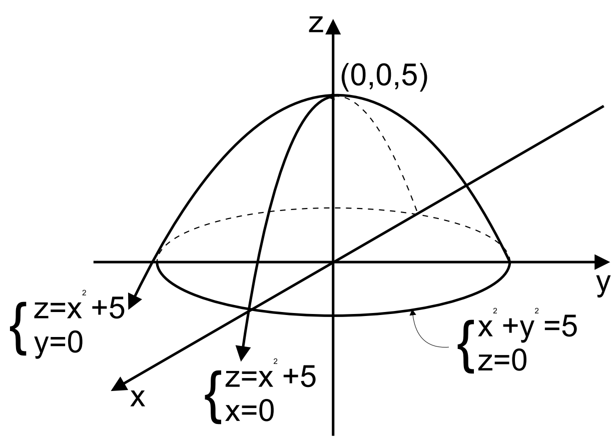

Figura 16.4:

El alumno puede intentar el ejercicio en Coordenadas Cartesianas, sin embargo aquí el integrando x^2+y^2 nos sugiere las Coordenadas Cilíndricas. Por tanto

$$I_z = \frac{12}{125}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{5-\rho^2} \rho\cdot\rho^2\; dz d\rho d\theta = \frac{12}{125}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} \rho^3(5-\rho^2)\; d\rho\, d\theta =$$

$$\frac{12}{125}\int_0^{2\pi}\left(\frac{5\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right)_0^{\sqrt{5}} d\theta = \frac{12}{125}\cdot 2\pi\cdot\frac{125}{12} = 2\pi$$

Problema 7

Hallar el momento de inercia I_X del sólido Q acotado por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y las regiones dadas por $x\geq 0,\; z\geq 0,\; y\geq 0,\; z=4$, con densidad $= c =$ constante.

Solución

$x^2 + y^2 = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z = 0, \ z = 4.$

$I_X = c \iiint_Q (y^2 + z^2) =$ (ver la figura 16.5)

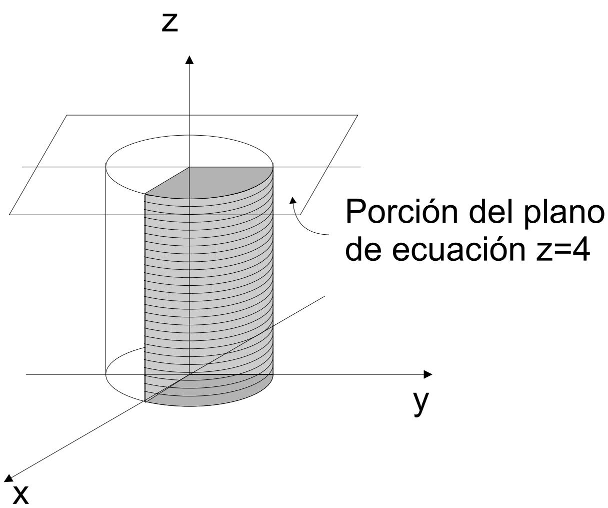

Figura 16.5:

$I_X = c \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 (y^2 + z^2)\ dzdydx$. En cilíndricas

$$I_X = c \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^4 \rho(\rho \operatorname{sen}\theta + z^2)\ dzd\rho d\theta = c \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(\rho^2 (\operatorname{sen}\theta) z + \rho \frac{z^3}{3} \right)_0^4 \ d\rho d\theta$$

$$= c \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(4(\operatorname{sen}\theta)\rho^2 + \frac{64}{3}\ \rho \right)\ d\rho d\theta = c \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{3}(\operatorname{sen}\theta)\rho^3 + \frac{64}{3}\ \frac{\rho^2}{2} \right)_0^1 \ d\theta$$

$$= \frac{4c}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}\theta + \frac{32}{3} \right)\ d\theta = \frac{4c}{3} \left(-\cos\theta + \frac{32}{3}\theta \right)_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4c}{3} \left(\frac{16\pi}{3} + 1 \right) = \frac{4c}{3} \frac{16\pi + 3}{3} = \frac{4c(16\pi + 3)}{9}$$

Problema 8

Hallar el centroide de un octante de una esfera sólida de centro en el origen y radio a.

Solución

El centroide es el centro de gravedad (Centro de masa con densidad constante) Por lo tanto, al ser el sólido homogéneo, $X_g = Y_g = Z_g =$

$$= \frac{1}{V(Q)} \iiint_Q x = \frac{1}{\frac{1}{8}(\frac{4}{3}\pi a^3)} \iiint_Q x = \frac{6}{\pi a^3} \iiint_Q x$$

(ver la figura 16.6)

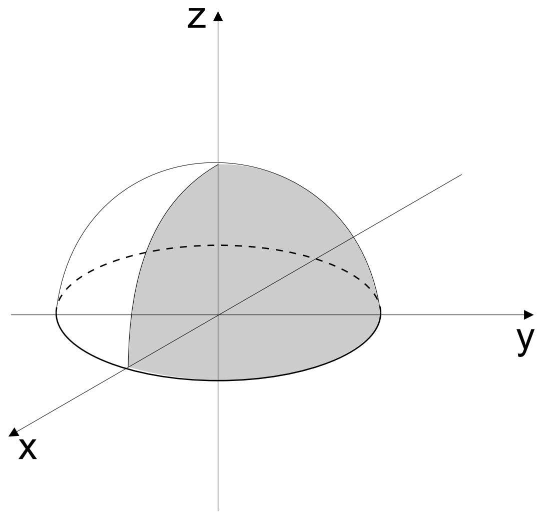

Figura 16.6:

Ahora, en Coordenadas Esféricas:

$$\iiint_Q x = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} (\rho^2 \operatorname{sen}\varphi)(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\ d\ \rho d\varphi d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)(\overset{2}{\operatorname{sen}}\varphi)\ d\varphi d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\varphi\right]_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^4}{16}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\ d\theta = \frac{\pi a^4}{16} \quad \Rightarrow\ X_g = Y_g = Z_g = \frac{3a}{8}$$

Problema 9

Hallar la masa de un sólido Q cuya superficie está limitada por las gráficas de los conjuntos siguientes:
$A = \{(x,y,z) \mid y^2 + z^2 = 9\}$; $B = \{(x,y,z) \mid x + z = 3\}$; $C = \{(x,y,z) \mid x = 0\}$. Se conoce la densidad de Q que es $\delta(x,y,z) = y^2 + z^2$.

Solución

A representa una superficie cilíndrica cuyo eje es el x, B al plano $x+z=3$, $x=x$ y C al plano yz. Lo más conveniente es entonces, proyectar el sólido Q sobre el plano yz. Se dibujan los ejes como en la figura sólo por comodidad para su visualización (ver la figura 16.7 en la página 173)

$$M(Q) = \iiint_Q \delta(x,y,z) = \iiint_Q (x^2+y^2)$$

En cilíndricas, con los ejes en el orden yzx será $\left\{\begin{array}{l} y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\operatorname{sen}\theta \\ \quad x = x \end{array}\right.$

(Aquí y ocupa el lugar de x, z el de y y x el de z)

$$M(Q) = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{3-\rho\operatorname{sen}\theta} \rho\cdot\rho^2\ dx d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}(3\rho^3 - \rho^4\operatorname{sen}\theta\ d\rho d\theta$$

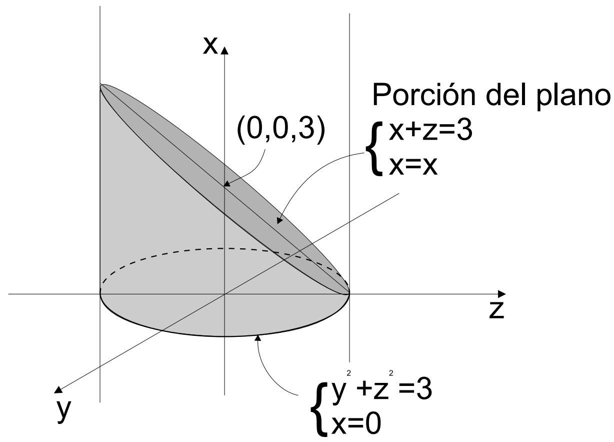

Figura 16.7:

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\rho^4 - \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}\theta \right)_0^3 \, d\theta = \frac{3^5}{4} 2\pi - \frac{3^5}{5} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{3^5 \pi}{2} \quad Unidades\ de\ Masa$$

Problema 10

Calcular el momento I_{yz} de la porción de elipsoide descrito por $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{81} \leq 1,\ \ y \geq 0,$ $z \geq 0,\ \ \delta(x, y, z) = \dfrac{5}{192}$

Solución

$\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{81} \leq 1,\ \ y \geq 0, z \geq 0,\ \ \ \delta(x, y, z) = \dfrac{5}{192}$

$I_{yz} = \dfrac{5}{192} \displaystyle\iiint_Q x^2$. En Coordenadas Elipsoidales (ver la figura 16.8)

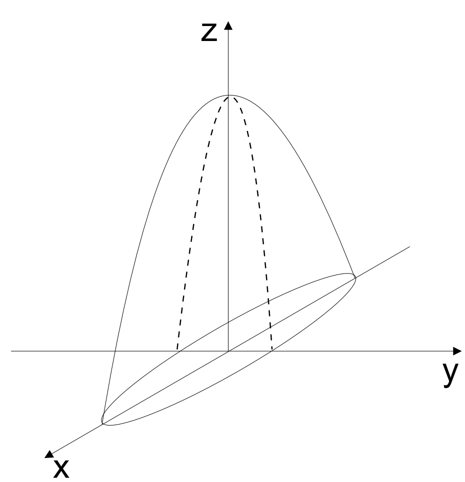

Figura 16.8:

$$I_{yz} = \frac{5}{192}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (36\rho^2 \operatorname{sen}\varphi)[16\rho^2(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^2\varphi]\ d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \frac{5}{192}\cdot 576\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^4(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^3\varphi\ d\rho d\varphi d\theta = \frac{5\cdot 576}{192\cdot 5}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)\operatorname{sen}^3\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$= \frac{576}{192}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\ d\theta = 2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \pi$$

Problema 11

Hallar el volúmen del sólido limitado lateralmente por la superficie dada por $x^2+y^2 = 2$ y superior e inferiormente por la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$

Solución

$x^2 + y^2 = 2;\ \ z^2 = x^2 + y^2$

Se sabe que el cono: $(\tan^2\varphi)z^2 = x^2 + y^2 \ \Rightarrow\ \tan^2\varphi = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ h = \sqrt{2}$, esto es sólo para hacer bien el dibujo (ver la figura 16.9)

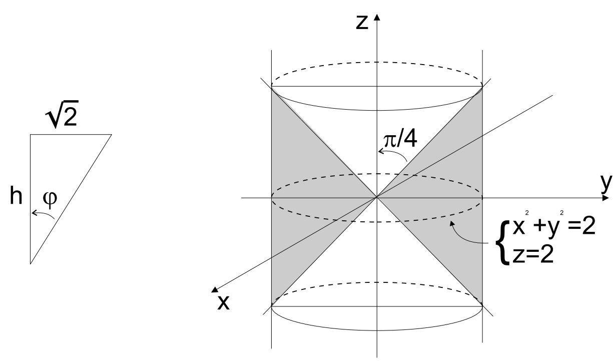

Figura 16.9:

Ahora en cilíndricas

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\rho}\rho\ dz d\rho d\theta = \frac{8\pi}{3}\sqrt{2}\ \ Unidades\ de\ Vol\acute{u}men$$

Nota: El sólido es: Cilíndro sólido $x^2 + y^2 \leq 2,\ \ z = \sqrt{2},\ \ z = -\sqrt{2}$ sacándole la parte de Cono sólido $z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = \sqrt{2},\ \ z = -\sqrt{2}$.

Capítulo 17

Autoevaluación

17.1 Examen de autoevaluación 3.

1. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{yz}{x^2+y^2}$ con $\mathcal{C}$ el arco de curva dada por $\sigma(t) = (3at, 3at^2, 2a(1+t^3))$, $\ a > 0$, entre los puntos tales que $t = 0;\ t = 1$.

2. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\,dx + x\,dy + z\,dz$ con $\sigma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t, t^2), t \in [0, 2\pi]$.

3. Sea $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x\,\mathrm{sen}\,y, xy + z)$

(a) Demuestre que $F = \nabla f$, con $f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + \dfrac{1}{2}z^2$.

(b) Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\sigma$, $\ \mathcal{C}$ la curva del dibujo (ver la figura 17.1)

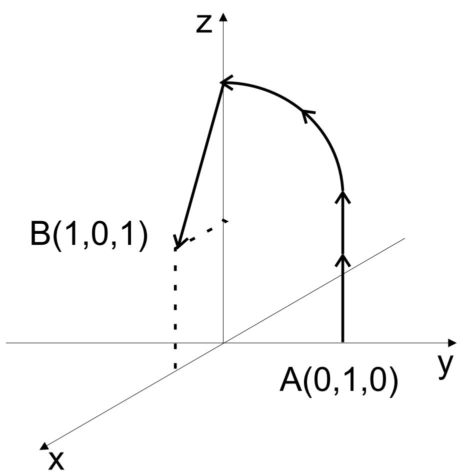

Figura 17.1:

4. Calcular $\displaystyle\int\!\!\int_T [1 + y]$ con T el triángulo de vértices $(0, 0);\ (3, 0);\ (3, 3)$.

5. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un trapecio de vértices $A(1, 1);\ B(4, 1);\ C(2, 4);\ D(3, 4)$.

(a) Expresar $\displaystyle\int\!\!\int_D f$ con D tipo I.

(b) Expresar $\displaystyle\iint_D f$ con D tipo II.

6. Calcular $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}+}(3x^2e^y - y)\,dx + (x^3e^y - x + 3y)\,dy$ con $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16x^2 + 9y^2 = 144\}$.

7. Sea D la región acotada por las curvas de ecuaciones $y = 2x,\ y = x,\ x + y = 1,\ x + y = 2$. Calcular $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

8. Calcular el volumen del sólido común a los dos sólidos dados por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\sqrt{2}z$, respectivamente.

9. Demuestre que el volumen de una esfera de radio R es $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

10. Calcular la masa de una lámina plana cuya forma está representada por $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \leq 0,\ \ y \geq 0\}$, con densidad en cada punto (x,y) igual a $d(x,y) = x^2 + y^2$.

Soluciones.

1. $a\left(4 + \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. $8\pi^2$.

3. (b) $e + 1 - \cos(1)$

4. 7

5. (a) I= $\displaystyle\int_1^2\int_1^{3x-2} f(x,y)\ dydx + \int_2^3\int_1^4 f(x,y)\ dydx + \int_3^4\int_1^{13-3x} f(x,y)\ dydx$

(b) I= $\displaystyle\int_1^4\int_{\frac{y+2}{3}}^{\frac{13-y}{3}} f(x,y)\ dxdy$.

6. 0.

7. $\dfrac{1}{2}(e^4 - e)$.

8. $2\pi\left(\dfrac{8}{3} - \sqrt{2}\right)$.

10. $M(D) = \dfrac{3\pi}{64}$ unidades de masa.

Bibliografía

1. Cálculo Vectorial - Tercera Edición.
   J. Marsden & A. Tromba
   Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.

2. Cálculo - Segunda Edición.
   Tom Apostol
   Editorial Xerox College Publishing.

3. Matemáticas Superiores en ejercicios y problemas.
   P.E. Dankó - A.G. Popov - T.YA. Kozhévnikova
   Editorial MIR. Moscú 1983.

4. Exámenes elaborados por profesores del Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la U.S.B.

5. Guías de ejercicios publicados por preparadores del Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la U.S.B.